# Sturm-Liouville-Problem

## Sturm-Liouville'scher Differentialoperator:

Wie bringe ich einen allgemeinen linearen Differentialoperator 2. Ordnung $L_x y(x) = \left(a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\right) y(x)$ auf Sturm-Liouvillegestalt $L_x y(x) = -\frac{1}{\rho(x)} S_x y(x)$ , wobei $S_x y(x) = \left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right] y(x)$ der Sturm-Liouville'sche Differentialoperator ist?

$$\left(a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)\right) y(x) = \left(-\frac{p(x)}{\rho(x)}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{p'(x)}{\rho(x)}\frac{d}{dx} - \frac{q(x)}{\rho(x)}\right) y(x)$$

Aus Koeffizientenvergleich folgt: $\begin{cases} p(x) = -a(x)\rho(x) \\ p'(x) = -b(x)\rho(x) \\ q(x) = -c(x)\rho(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \frac{p'}{p} = (\ln p)' = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p(x) = C\exp(\int \frac{b(x)}{a(x)} dx)}$

(C ist nur eine Integrationskonstante, die sich wieder herauskürzen sollte.)

Durch Einsetzen von p(x), $\boxed{\rho(x) = -\frac{p(x)}{a(x)}}$ und $\boxed{q(x) = -c(x)\rho(x) = \frac{c(x)}{a(x)} p(x)}$ in $L_x y(x) = -\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right] y(x)$ erhält man die gesuchte Gestalt.

## Sturm-Liouville-Transformation:

Wie komme ich von $L_x y(x) = -\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right] y(x) = \lambda y(x)$, mit $x \in [a,b]$ auf die Liouville'sche Normalform $\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \hat{q}(t)\right) w(t) = \lambda w(t)$ mit $t = t(x)$, in der ich das Eigenwertproblem viel leichter lösen kann?

Wir machen den Ansatz $y(x) = w(t(x))H(x)$.
Es folgt $y' = w'H + wH' = \dot{w}t'H + wH'$ [1] (Kettenregel!)
und $y'' = \ddot{w}(t')^2 H + \dot{w}t''H + 2\dot{w}t'H' + wH''$.

Einsetzen in die Differentialgleichung $L_x y(x) = \lambda y(x)$ liefert
$-\frac{p}{\rho}(\ddot{w}(t')^2 H + \dot{w}t''H + 2\dot{w}t'H' + wH'') - \frac{p'}{\rho}(\dot{w}t'H + wH') - \frac{q}{\rho} wH = \lambda wH$
$\Rightarrow \quad -\frac{(t')^2 p}{\rho}\ddot{w}(t) - (\frac{t''p}{\rho} + \frac{2t'p}{\rho}\frac{H'}{H} + \frac{t'p'}{\rho})\dot{w}(t) - (\frac{pH''}{\rho H} + \frac{p'H'}{\rho H} + \frac{q}{\rho})w(t) = \lambda w(t)$

Aus Vergleich mit der Normalform $-\ddot{w}(t) + \hat{q}w(t) = \lambda w(t)$ folgt

- $\frac{(t')^2 p}{\rho} = 1 \quad \Rightarrow \quad t' = \pm\sqrt{\frac{\rho}{p}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t(x) = \pm\int_a^x \sqrt{\frac{\rho(\tilde{x})}{p(\tilde{x})}} d\tilde{x}}$

[1] Ein Strich steht für eine Ableitung nach x und ein Punkt für eine Ableitung nach t.

Daraus kann man dann auch die Umkehrfunktion $x = x(t)$ bestimmen.
Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass $t'p > 0$ erfüllt ist.

- $\frac{t''p}{\rho} + \frac{2t'p}{\rho}\frac{H'}{H} + \frac{t'p'}{\rho} = 0 = \frac{1}{2}\frac{t''}{t'} + \frac{H'}{H} + \frac{1}{2}\frac{p'}{p} \quad \Rightarrow \quad (\ln H)' = -\frac{1}{2}(\ln(t'p))'$
  $\Rightarrow \quad \ln H = -\frac{1}{2}\ln(t'p) + \tilde{c}$ (wähle o.B.d.A. $\tilde{c} = 0$)
  $$\Rightarrow \quad H = \frac{1}{\sqrt{t'p}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\rho(x)p(x)}}}$$
- $$\boxed{\hat{q} = -\frac{1}{\rho H}(pH'' + p'H' + qH) = \frac{1}{H}L(H)}$$
  Sollte in $\hat{q}$ noch eine x-Abhängigkeit sein, muss hier $x = x(t)$ gesetzt werden, um $\hat{q} = \hat{q}(t)$ zu erhalten.

Durch Einsetzen erhält man die Liouville'sche Normalform
$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \hat{q}(t)\right) w(t) = \lambda w(t).$$

(Sowohl Definitionsbereich als auch Randbedingungen können sich durch die Transformation ändern!)