Name: Gruppe: Matr. Nr.:

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 9. 12. 2011, 2011W

1 Indexschreibweise (30 Punkte)

Vereinfachen und berechnen Sie

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{E} \times \mathbf{x})\,,$$

wobei $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld und $\mathbf{x}$ der Ortsvektor ist (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik).

2 Delta-Distribution (30 Punkte)

Berechnen Sie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(xy + 2y)\delta(2x - 2y - 4) f(x, y).$$

3 Tensoren (40 Punkte)

Die Komponenten eines kovarianten Tensors zweiter Stufe A bezüglich der dualen Basis zur orthonormalen Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ lauten $A_{11} = 0$, $A_{12} = 1$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 0$.

a) Wie lauten die Komponenten des Tensors A bezüglich der dualen Basis zur nicht-orthogonalen Basis $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$? (Anzugeben sind A'_{11}, A'_{12}, A'_{21}, A'_{22}). [10]

b) Wie schaut der metrische Tensor g'_{ij} der nicht-orthogonalen Basis aus? [10]

c) Berechnen Sie außerdem g'^{ij}. [10]

d) Welche Zahl muss für

$$s = g'^{ij} A'_{jk} g'^{km} \left(A'_{mi} - A'_{im} \right)$$

herauskommen (ohne die Rechnung explizit in $\mathcal{B}'$ durchführen zu müssen)? [10]

Hinweis: Wenn die Basisvektoren wie $\mathbf{e}'_i = a_i{}^j \mathbf{e}_j$ transformieren, so transformiert der kovariante Tensor wie $A'_{jk} = a_j{}^l a_k{}^m A_{lm}$.