Name: Gruppe: Matr. Nr.:
Zahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 20. 01. 2012, 2011W

1 Separationsansatz (30 Punkte)

Separieren Sie folgende Differentialgleichung

$$\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi(x,y,z)=\left(\lambda+y^2\right)\Phi(x,y,z)$$

in Differentialgleichungen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen.

2 Sturm-Liouville-Problem (30 Punkte)

a) Bringen Sie, für $x\in(-\infty,b]$ mit $a=-\infty<b<\infty$,

$$\mathcal{L}_x y(x)=-\frac{y''}{e^{2x}}-\frac{y'}{e^{2x}}+e^{2x}y$$

auf die Gestalt des Sturm-Liouville-Differentialoperators. [15]
b) Transformieren Sie die Differentialgleichung $\mathcal{L}_x y(x)=\lambda y(x)$ durch die Sturm-Liouville'sche Transformation in die Liouvillesche Normalform. Wie lautet der zugehörige Definitionsbereich? [15]

Hinweis:
$\mathcal{L}_x y(x)=a_0(x)y(x)+a_1(x)\frac{d}{dx}y(x)+a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}y(x)=f(x)$.
Sturm-Liouville Form: $\mathcal{S}_x y(x)=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]y(x)+q(x)y(x)=F(x)$,
mit $p(x)=e^{\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$, $q(x)=p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$, $F(x)=\frac{p(x)}{a_2(x)}f(x)$, $\rho(x)=-\frac{p(x)}{a_2(x)}$.
Sturm-Liouville Transformation:
$t(x)=\int_a^x\sqrt{\frac{\rho(s)}{p(s)}}ds$, $w(t)=\frac{y(x(t))}{H(x(t))}=\sqrt[4]{p(x(t))\rho(x(t))}y(x(t))$,
$\hat{q}(t)=\frac{1}{H}\mathcal{L}_x H=\frac{1}{\rho}\left[-q-\sqrt[4]{p\rho}\left(p\left(\frac{1}{\sqrt[4]{p\rho}}\right)'\right)'\right]$ mit $(\dots)'=\frac{d}{dx}$.
Liouvillesche Normalform:
$-\frac{d^2}{dt^2}w(t)+\left[\hat{q}(t)-\lambda\right]w(t)=0$.

BITTE WENDEN!

3 Greensche Funktion (40 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+1\right)y(x)=2.$$

a) Finden Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{G}(k)$ einer zugehörigen Greenschen Funktion. [10]

b) Finden Sie die rücktransformierte Greensche Funktion $G(x,x')$ mit Hilfe des Residuensatzes. [10]

c) Konstruieren Sie eine Greensche Funktion, die

$$G(0,x'>0)=0 \text{ und } G'(0,x'>0)=0$$

erfüllt ($G'(x,x')=\frac{d}{dx}G(x,x')$).

Hinweis: die homogenen Greenschen Funktionen lauten $\{e^{x-x'},e^{-x+x'}\}$. [10]

d) Lösen Sie die Differentialgleichung auf $x\in[0,\infty)$ unter den Randbedingungen $y(0)=0$ und $y'(0)=0$ mit Hilfe der Greenschen Funktion. [10]