Name: Gruppe: Matr. Nr.:

Zahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044, 2011W)

Nachtest, 9. 3. 2012

1 Indexschreibweise (30 Punkte)

Vereinfachen und berechnen Sie

$$(\mathbf{x} \times \nabla) \times (\nabla r),$$

wobei $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ und $\mathbf{x}$ der Ortsvektor ist (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik).

2 Delta-Distribution (30 Punkte)

Berechnen Sie (unter Berücksichtigung der Integrationsgrenzen)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{0} dy \delta(x^2 - y^2)\delta(x^2 - y - 2) g(x, y).$$

3 Greensche Funktion (40 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2\right) y(x) = 2.$$

a) Finden Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{G}(k)$ einer zugehörigen Greenschen Funktion. [10]

b) Finden Sie die rücktransformierte Greensche Funktion $G(x, x')$ mit Hilfe des Residuensatzes. [10]

c) Konstruieren Sie eine Greensche Funktion, die

$$G(0, x' > 0) = 0 \text{ und } G'(0, x' > 0) = 0$$

erfüllt ($G'(x, x') = \frac{d}{dx} G(x, x')$).

Hinweis: die homogenen Greenschen Funktionen lauten $\{e^{-2(x-x')}, e^{-x+x'}\}$. [10]

d) Lösen Sie die Differentialgleichung auf $x \in [0, \infty)$ unter den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ mit Hilfe der Greenschen Funktion. [10]