4. Tutorium **für 11.11.11**

4.1 Funktionen von Matrizen

Gegeben seien invertierbare quadratische Matrizen A, B, C, M, N. Zeige:
a) $\det\left(A^{-1}BA\right) = \det B$ (Hinweis: Produktregel für Determinanten: $\det\left(M \cdot N\right) = \det M \cdot \det N$).
b) $\mathrm{Tr}\left(A^{-1}BA\right) = \mathrm{Tr}B$ (Hinweis: zyklische Vertauschung $\mathrm{Tr}\left(ABC\right) = \mathrm{Tr}\left(BCA\right)$).
c) $e^{A^{-1}BA} = A^{-1}e^{B}A$ (diesmal sauber über die Taylor-Reihe).
d)$\det\left(e^{A}\right) = e^{\mathrm{Tr}A}$ (Hinweis: „Diagonalisiere“ A über $A = S^{-1}A_D S$).
e) $\ln\left(\det B\right) = \mathrm{Tr}\left(\ln B\right)$.

4.2 Tensoren

a) Die Komponenten eines kovarianten Tensors zweiter Stufe A bezüglich der dualen Basis zur Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ lauten $A_{11} = 1$, $A_{12} = 2$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 4$. Wie lauten die Komponenten bezüglich der dualen Basis zu einer um den Winkel φ gedrehten Basis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\} = \left\{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}\right\}$?
(Hinweis: Wenn die Basisvektoren wie $\mathbf{e}'_i = a_i{}^j \mathbf{e}_j$ transformieren, so transformiert der kovariante Tensor zweiter Stufe wie $A'_{jk} = a_j{}^l a_k{}^m A_{lm}$, wobei die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde).
b) Wie schaut der metrische Tensor g'_{ij} der gedrehten Basis aus? Berechne außerdem g'^{ij} über $g'^{ij}g'_{jk} = \delta^i{}_k$.
c) Berechne die Komponenten des zugehörigen kontravarianten Tensors mit Hilfe des metrischen Tensors, also $A'^{ij} = g'^{ik}g'^{jl}A'_{kl}$.

Nicht-orthogonale Basis

d) Wie lauten die Komponenten des Tensors A bezüglich der dualen Basis zur nicht-orthogonalen Basis $\{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$?
e) Berechne g'' und die Komponenten des kontravarianten Tensors A''^{ij}.
*) Zur Überprüfung der Ergebnisse kann man die Basisunabhängigkeit der Spur verwenden: $g^{ij}A_{ji} = g_{ij}A^{ji} = g'^{ij}A'_{ji} = g'_{ij}A'^{ji} = g''^{ij}A''_{ji} = g''_{ij}A''^{ji} = 5$, $A^{ij}A_{ji} = A'^{ij}A'_{ji} = A''^{ij}A''_{ji} = 29$ und $A^{ij}A_{ij} = A'^{ij}A'_{ij} = A''^{ij}A''_{ij} = 30$.

4.3 Levi-Civita Symbol

Das Epsilon-Symbol (Levi-Civita Symbol) ist folgendermaßen definiert:

$$\varepsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k,\ldots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k,\ldots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ durch repräsentatives Einsetzen von Zahlen in die Indizes (Einsteinsche Summenkonvention!).
b) Zeige, dass der Epsilon-Tensor in einer orthonormalen Basis mit euklidischer Metrik[1] invariant gegenüber Drehungen in der x_1-x_2-Ebene ist: $\varepsilon'_{ijk} = a_i{}^l a_j{}^m a_k{}^n \varepsilon_{lmn}$ (zumindest exemplarisch für ε'_{123} und ε'_{213})

Ankreuzbar: 1abc, 1de, 2abc, 2de, 3a, 3b

[1]Für eine euklidische Metrik mit orthonormalen Basen braucht nicht zwischen unteren und oberen Indizes unterschieden zu werden (man kann es aber natürlich weiterhin tun).