5. Tutorium **für 18.11.2011**

5.1 Differentialoperatoren

Vereinfache und berechne mit Hilfe der Indexschreibweise (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik):
a) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v}$.
b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$.
c) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$.
d) $\mathbf{A}\left[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})\right]$.
e) $\nabla\cdot\mathbf{x}$.
f) ∇r mit $r=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$.
g) $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{r^5}\right)$ mit $r=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$.
h) $\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^5}\right)$ mit $\mathbf{p}$ konstant und $r=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$.

5.2 Tensorfelder

Welche der folgenden Tensorfelder sind bezüglich Rotationen um den Ursprung forminvariant (für eine zweidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik)?
a) $Q(x)=\begin{pmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}$.
b) $R(x)=\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2 & 0 \\ 0 & x_1^2+x_2^2 \end{pmatrix}$.
c) $S(x)=\begin{pmatrix} 0 & x_1^2+x_2^2 \\ x_1^2+x_2^2 & 0 \end{pmatrix}$.
d) $T(x)=\begin{pmatrix} x_1^2-1 & x_1x_2-1 \\ x_1x_2+1 & x_2^2-1 \end{pmatrix}$.

5.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten sind definiert durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(r,\theta,\varphi) \\ y(r,\theta,\varphi) \\ z(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

a) Berechne den metrischen Tensor g'_{ij} für die Kugelkoordinaten $x'^1=r$, $x'^2=\theta$, $x'^3=\varphi$. Sind die neuen Koordinaten orthogonal?

b) Berechne die neuen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_\theta \equiv \mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}_\varphi \equiv \mathbf{e}'_3$ über $\tilde{\mathbf{e}}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\mathbf{e}_j$ und anschließender Normierung $\mathbf{e}'_i = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{e}}'_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}'_i}}\tilde{\mathbf{e}}'_i$ (in dieser Formel wird nicht über i summiert).

c) Wenn man einen metrischen Tensor der Form $g = \begin{pmatrix} U^2 & 0 & 0 \\ 0 & V^2 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 \end{pmatrix}$ gegeben hat, so lassen sich der Gradient und die Divergenz in der zugehörigen orthonormalen Basis folgendermaßen schreiben:

$$\nabla\phi = \frac{1}{U}\mathbf{e}'^1\partial'_1\phi + \frac{1}{V}\mathbf{e}'^2\partial'_2\phi + \frac{1}{W}\mathbf{e}'^3\partial'_3\phi.$$

$$\mathrm{div}\mathbf{a} = \frac{1}{UVW}\left[\partial'_1\left(VWa'^1\right) + \partial'_2\left(UWa'^2\right) + \partial'_3\left(UVa'^3\right)\right].$$

Wie lauten Gradient und Divergenz in Kugelkoordinaten?

Ankreuzbar: 1abcd, 1efgh, 2abc, 2d, 3a, 3bc