

6. Tutorium

für 25.11.2011

6.1 Gaußsches Integral

- a) Berechne die Jacobi-Matrix $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$ und die Jacobi-Determinante $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right|$ für Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.
- b) Berechne das Gaußsche Integral

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

(Hinweis: Berechne das Quadrat $X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$ mit Hilfe von Polarkoordinaten, wobei das Flächenelement über die Jacobi-Determinante transformiert wird: $dx dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| dr d\varphi$).

6.2 Residuensatz

- a) Berechne alle Lösungen von $x^n + 1 = 0$ über die Formel von de Moivre. Wie sehen die Lösungen für $n = 4$ aus?
- b) Sei $f(x) = g(x)/h(x)$, wobei g und h analytisch um einen Punkt c seien, und h eine einfache Nullstelle am Punkt c hat. Zeige, dass dann das Residuum an der Stelle c berechnet werden kann durch

$$\text{Res}_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{g(c)}{h'(c)}.$$

(Hinweis: Nähere $h(x)$ in der Umgebung von c an durch $h(x) \approx (x - c)h'(c)$).

- c) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + ax + b}{x^4 + 1} dx$$

über den Residuensatz.

6.3 Testfunktionen

- a) Berechne

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax + b)\varphi(x) dx$$

für $a > 0$. Welche Bedingungen muss die Testfunktion φ erfüllen?

- b) Berechne das gleiche für $a < 0$.

6.4 Parabolische Koordinaten

a) Berechne explizit und detailliert die Komponenten des metrischen Tensors in parabolischen Zylinderkoordinaten x, u, v , wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ uv \end{pmatrix}.$$

Sind die Koordinaten orthogonal aufeinander?

b) Wie lauten die neuen Einheitsvektoren?

c) Wie lauten Divergenz und Gradient in den neuen Koordinaten?

Ankreuzbar: 1ab, 2ab, 2c, 3ab, 4a, 4bc