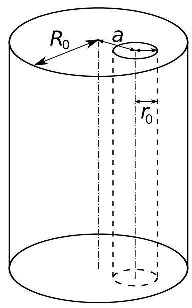
4. Tutorium **für 27.04.2012**

4.1 Zylinder mit exzentrischer Längsbohrung

a) Gegeben sei ein unendlich langer Zylinder mit Radius R_0 mit homogener Raumladungsdichte ρ_0. Berechne das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ und das davon abgeleitete elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Inneren und Äußeren des Zylinders durch Lösen der Poisson-Gleichung[1] $\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$. Das Potential kann hierbei so gewählt werden, dass es entlang der Zylinderachse endlich ist. Weitere Integrationskonstanten sind geeignet zu wählen, dass das Resultat *jeder* Integration im gesamten Raum stetig ist.



b) In diesen unendlich langen Zylinder wird nun ein unendlich langes achsenparalleles aber exzentrisches Loch mit Radius r_0 gebohrt (siehe nebenstehende Skizze). Der Abstand der Achse des Zylinders zur Achse der Bohrung sei a, wobei $a+r_0 < R_0$ gelte (d.h., die Bohrung befindet sich zur Gänze innerhalb des Zylinders). Berechne für den (ladungsfreien) Innenraum der Bohrung das elektrostatische Potential und das elektrostatische Feld.

4.2 Dirichlet-Randwertaufgabe im Halbraum

Eine unendlich ausgedehnte Leiteroberfläche bei $z = 0$ sei außerhalb einer scheibenförmigen Ausnehmung mit Radius a auf Potential Null gehalten. Die Kreisscheibe $x^2 + y^2 < a^2$ und $z = 0$ sei ebenfalls eine Leiteroberfläche, diese aber (durch eine dünne Isolierung von der geerdeten Leiterplatte getrennt) auf Potential V. An der Stelle $\vec{r} = (0, 0, d)$, $d > 0$, befinde sich eine Punktladung q. Berechne das Potential entlang der positiven z-Achse.

Hinweis: Die Dirichlet-Greenfunktion für den Halbraum $z > 0$ lautet

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|(x - x', y - y', z - z')|} - \frac{1}{|(x - x', y - y', z + z')|}.$$

[1] Δ und $\vec{\nabla}$ in Zylinderkoordinaten finden sich beispielsweise in Anhang A des Vorlesungsskriptums von Prof. Nowotny.

4.3 Multipolmomente homogen geladener (verspäteter) Ostereier

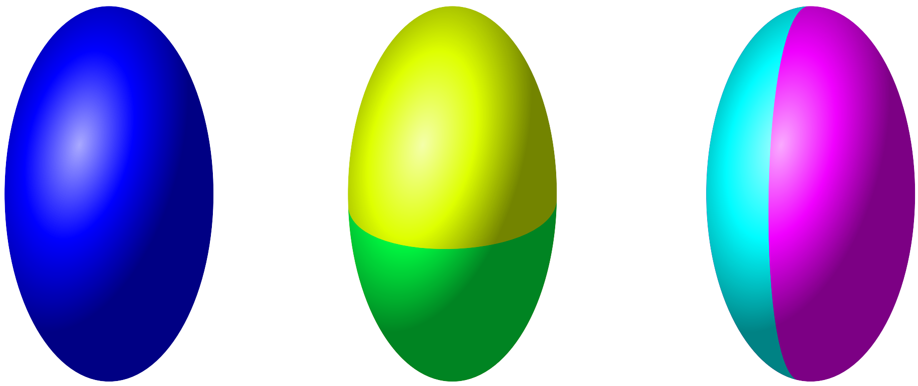
Gegeben seien drei bezüglich der z-Achse rotationssymmetrische Ellipsoide mit Hauptachen $a = b$, c.

a) Das erste Ellipsoid sei homogen mit Raumladungsdichte ρ_0 geladen. Berechne hierfür die elektrostatischen sphärischen Multipolmomente q_{lm} mit $l \leq 2$ und schreibe das elektrostatische Potential in der entsprechenden Näherung für $r > \max(a, c)$ an.

b) Das zweite Ellipsoid von der selben Form sei für $z > 0$ positiv und für $z < 0$ negativ mit Raumladungsdichte $\pm\rho_0$ geladen. Wie sehen die entsprechenden Multipolmomente und Potentiale für $l \leq 2$ aus (wieder bezüglich des Zentrums des Ellipsoids)?

c) In welche Richtung wirkt die Kraft auf das erste Ei, wenn es sehr weit weg vom zweiten Ei platziert wird (in Abhängigkeit von ϑ und φ)? (Es braucht nur der führende nicht-verschwindende Term der Entwicklung angegeben werden).

d) Freiwillige Fleißaufgabe: Das dritte Ellipsoid sei für $x > 0$ positiv und für $x < 0$ negativ geladen. Welche Multipolmomente q_{lm} für $l \leq 2$ verschwinden nicht?



Hinweis: Es ist zweckmäßig, wenn man für die Berechnungen zu Koordinaten $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{y} = y/a$, $\tilde{z} = z/c$ übergeht, und im $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$-Raum Kugelkoordinaten $\tilde{r}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}$ einführt. Beachte dabei, dass die Winkel in den Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ aber im xyz Raum definiert sind.

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2, 3a, 3bc