2. Plenum - Lösungen **25.03.2011**

P2.1 Carnot-Kreisprozess

a)
$1 \to 2$: Isotherme Kompression bei $T = T_{II}$
$2 \to 3$: Isentrope Kompression bei $S = S_2$
$3 \to 4$: Isotherme Expansion bei $T = T_I > T_{II}$
$4 \to 1$: Isentrope Expansion bei $S = S_1 > S_2$
Für Diagramme und Erklärung siehe Wikipedia-Eintrag für „Carnot-Kreisprozess“.
b) $\mathrm{d}E = \delta Q + \delta W$, $\delta Q = T\mathrm{d}S$:

$$Q_{1\to 2} = \int_{S_1}^{S_2} T\mathrm{d}S = T_{II}\left(S_2 - S_1\right) < 0.$$

$$Q_{2\to 3} = Q_{4\to 1} = 0.$$

$$Q_{3\to 4} = \int_{S_3}^{S_4} T\mathrm{d}S = T_I\left(S_4 - S_3\right) = T_I\left(S_1 - S_2\right) > 0.$$

c) Da $E = \sum Q_{i\to i+1} + \sum W_{i\to i+1} = 0$,

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{|W|}{Q_{zugef\ddot{u}hrt}} = \frac{|\sum W_{i\to i+1}|}{Q_{3\to 4}} = \frac{|-\sum Q_{i\to i+1}|}{Q_{3\to 4}} = \frac{Q_{1\to 2} + Q_{3\to 4}}{Q_{3\to 4}} \\ &= \frac{T_{II}\left(S_2 - S_1\right) + T_I\left(S_1 - S_2\right)}{T_I\left(S_1 - S_2\right)} = 1 - \frac{T_{II}}{T_I}.\end{aligned}$$

d) $\delta W = -p\mathrm{d}V$. Isotherm: $p_1 V_1 = pV \quad \to \quad p = p_1 V_1 / V$

$$\begin{aligned}W_{1\to 2} &= -\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V}\mathrm{d}V = -p_1 V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = -Nk_B T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \\ &= -Nk_B T_{II} \ln\frac{V_2}{V_1}.\end{aligned}$$

Isentrope Ausdehnung: $p_2 V_2^\kappa = pV^\kappa$

$$\begin{aligned}W_{2\to 3} &= -\int_{V_2}^{V_3} p\mathrm{d}V = -\int_{V_2}^{V_3} \frac{p_2 V_2^\kappa}{V^\kappa}\mathrm{d}V = -p_2 V_2^\kappa\left(\frac{V_3^{1-\kappa}}{1-\kappa} - \frac{V_2^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right) \\ &= \frac{p_2 V_2}{\kappa - 1}\left[\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\kappa-1} - 1\right] = \frac{p_2 V_2}{\kappa - 1}\frac{1}{T_2}\left(T_3 - T_2\right) = \frac{Nk_B}{\kappa - 1}\left(T_3 - T_2\right) \\ &= C_V\left(T_3 - T_2\right) = C_V\left(T_I - T_{II}\right).\end{aligned}$$

Die Gleichung $p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa$ durch $p_2 V_2 / T_2 = p_3 V_3 / T_3$ dividieren ergibt $(V_2/V_3)^{\kappa-1} = T_3/T_2$. Außerdem wurde verwendet $Nk_B/(\kappa - 1) = C_V$ (siehe 3. Tutorium).
Alternativ kann man $W_{2\to 3}$ auch durch folgende Überlegung berechnen: $W_{2\to 3} + Q_{2\to 3} = E_{2\to 3}$, mit $Q_{2\to 3} = 0$ da isentrop, also $W_{2\to 3} = E_{2\to 3}$. Da $E_{2\to 3}$ wegunabhängig ist, kann man einen anderen Weg wählen: $E_{2\to 3} = E_{2\to X} + E_{X\to 3}$. Nun wählt man für $E_{2\to X}$ die Volumsausdehnung bei konstanter Temperatur, und $E_{X\to 3}$ die Temperaturabsenkung bei konstantem Volumen. Bei konstanter Temperatur gilt für das ideale Gas wegen $E = \frac{3}{2}Nk_B T$ dass $E_{2\to X} = 0$ erhalten bleibt. Bleibt also

$$W_{2\to 3} = E_{X\to 3} = Q_{X\to 3} + W_{X\to 3} = C_V\left(T_3 - T_X\right) = C_V(T_I - T_{II}).$$

da $W_{X\to 3} = 0$ bei konstantem Volumen, $\delta Q = C_V\mathrm{d}T$ bei konstantem Volumen, $T_3 = T_I$ und $T_X = T_2 = T_{II}$.

Analog:

$$W_{3\to4} = -Nk_BT_3 \ln\frac{V_3}{V_4} = Nk_BT_I \ln\frac{V_4}{V_3} = Nk_BT_I \ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Im letzten Schritt wurde verwendet

$$p_1V_1^\kappa = p_4V_4^\kappa, \quad p_2V_2^\kappa = p_3V_3^\kappa, \quad p_1V_1 = p_2V_2, \quad p_3V_3 = p_4V_4.$$

$$\to \quad \frac{p_1V_1^\kappa}{p_2V_2^\kappa} = \frac{p_4V_4^\kappa}{p_3V_3^\kappa} \quad \to \quad \frac{V_1^{\kappa-1}}{V_2^{\kappa-1}} = \frac{V_4^{\kappa-1}}{V_3^{\kappa-1}} \quad \to \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}.$$

$$W_{4\to1} = C_V\left(T_4 - T_3\right) = C_V\left(T_{II} - T_I\right).$$

Wirkungsgrad: Da $E_{3\to4} = 0$ (isotherm) ist $Q_{3\to4} = -W_{3\to4}$. Außerdem gilt hier $W_{2\to3} + W_{4\to1} = 0$.

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{|\sum W|}{Q_{3\to4}} = \frac{-\sum W}{-W_{3\to4}} = \left[Nk_BT_{II}\ln\frac{V_2}{V_1} - Nk_BT_I\ln\frac{V_1}{V_2}\right] / \left[-Nk_BT_I\ln\frac{V_1}{V_2}\right] \\ &= 1 - \frac{T_{II}}{T_I}.\end{aligned}$$