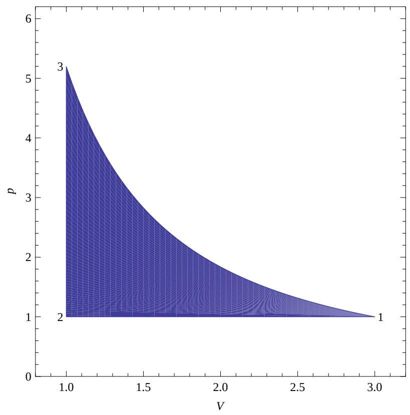
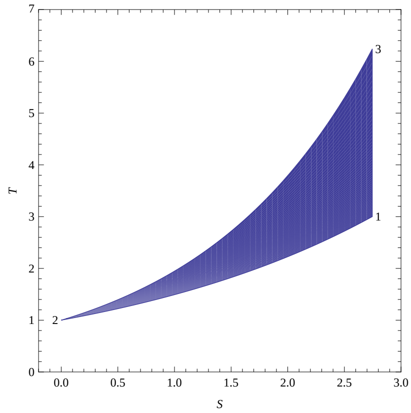
1. Test - Lösungen **15.04.2011**

2 Kreisprozess

a)





Im Arbeitsschritt $2 \to 3$ steigt der Druck, wie man aus $p_2/T_2 = p_3/T_3$ und $T_3 > T_2$ sieht.
b)

$$Q_{2\to 3} = C_V\,(T_3 - T_2)\,,$$

$$W_{1\to 2} = -\int_1^2 p_1\,\mathrm{d}V = p_1\,(V_1 - V_2) = Nk_B\,(T_1 - T_2)\,,$$

$$W_{2\to 3} = -\int_2^3 p\,\mathrm{d}V = 0 \quad (\text{da isochor} = \text{Volumen konstant}),$$

$$W_{3\to 1} = C_V\,(T_1 - T_3) \quad (\text{isentrop}).$$

(Alternative Berechnung für $W_{3\to 1}$ ($V_3 \equiv V_2$):

$$\begin{aligned}
W_{3\to 1} &= -\int_3^1 p\,\mathrm{d}V = -\int_3^1 p_1 \frac{V_1^\kappa}{V^\kappa}\,\mathrm{d}V = -p_1 V_1^\kappa \left(\frac{V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa} - \frac{V_3^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right) \\
&= -\frac{p_1 V_1}{1-\kappa}\left[1 - \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{1-\kappa}\right] = \frac{Nk_B T_1}{\kappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{1-\kappa}\right] \\
&= C_V T_1 \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) = C_V\,(T_1 - T_3)
\end{aligned}$$

mit $p_1 V_1^\kappa = p_3 V_3^\kappa$ und $p_1 V_1/T_1 = p_3 V_3/T_3$ gibt $(V_1/V_3)^{\kappa-1} = T_3/T_1$.)
c) Allgemein gilt

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3}.$$

Wegen $p_1 = p_2$ gilt $V_1/V_2 = T_1/T_2$. Wegen $V_2 = V_3$ gilt $p_2/p_3 = p_1/p_3 = T_2/T_3$.
Für die Isentrope gilt $p_1 V_1^\kappa = p_3 V_3^\kappa$, also $p_3/p_1 = V_1^\kappa/V_3^\kappa = V_1^\kappa/V_2^\kappa$. Damit folgt

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_1^\kappa}{V_2^\kappa} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\kappa \quad \to \quad T_3 = T_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\kappa.$$

3. Zweidimensionales Gas

a) Phasenraumvolumen

$$
\begin{aligned}
\Phi(E) &= \int_{H<E} \mathrm{d}^{2N}p\, \mathrm{d}^{2N}q \\
&= \left(\sqrt{2m}\right)^{2N} \int_{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{2N}^2<E} \mathrm{d}^{2N}p \left[\int_{x^2+y^2<R^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\right]^N \\
&= (2m)^N \frac{\pi^N \sqrt{E}^{2N}}{(2N/2)!} \left(R^2\pi\right)^N \\
&= \frac{\left(2m\pi^2 R^2 E\right)^N}{N!}
\end{aligned}
$$

mit

$$
p_i := \frac{p_{x,i}}{\sqrt{2m}}, \quad p_{i+N} := \frac{p_{y,i}}{\sqrt{2m}}
$$

und „Volumen“ (Fläche) $V = \pi R^2$.
b) Anzahl der Zustände:

$$
\begin{aligned}
\Omega(E;\Delta) &= \frac{1}{N! h^{2N}} \left[\Phi(E) - \Phi(E-\Delta)\right] \\
&= \frac{1}{(N!)^2} \left(\frac{2m\pi^2 R^2 E}{h^2}\right)^N \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta}{E}\right)^N\right].
\end{aligned}
$$

c) Entropie:

$$
\begin{aligned}
S &= k_B \ln \Omega \\
&= k_B \left[N \ln\left(\frac{2m\pi^2 R^2 E}{h^2}\right) - 2\ln N! + \ln\left(1 - \left(1 - \frac{\Delta}{E}\right)^N\right)\right] \\
&\overset{N\to\infty}{\simeq} k_B \left[N \ln\left(\frac{2m\pi^2 R^2 E}{h^2}\right) - 2N\ln N + 2N\right] \\
&= N k_B \left[\ln\left(\frac{2m\pi^2 R^2 E}{N^2 h^2}\right) + 2\right].
\end{aligned}
$$

Temperatur:

$$
\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V,
$$

$$
\frac{1}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial E}\right|_{N,V} = N k_B \frac{1}{E} \quad \to \quad T = \frac{E}{N k_B}.
$$

Wärmekapazität:

$$
\mathrm{d}Q = C_V \mathrm{d}T = \mathrm{d}E,
$$

$$
C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{N,V} = N k_B.
$$