

1. Tutorium - Lösungen

18.03.2011

1.1 Legendretransformation

a)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = Nk_B \frac{3}{2} \frac{1}{E} = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad E = \frac{3}{2} Nk_B T$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(1/T, V, N) &= S(E, V, N) - \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} E \\ &= Nk_B \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m}{3Nh^2} \frac{3}{2} Nk_B T \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{5}{2} \right\} - \frac{1}{T} \frac{3}{2} Nk_B T \\ &= Nk_B \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 1 \right\} \end{aligned}$$

b)

$$E(S, V, N) = \frac{3Nh^2}{4\pi m} \left(\frac{N}{V} \exp \left[\frac{S}{Nk_B} - \frac{5}{2} \right] \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3Nh^2}{4\pi m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \exp \left[\frac{2}{3} \frac{S}{Nk_B} - \frac{5}{3} \right]$$

Lösungsweg 1 (explizit ausgerechnet):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} &= \frac{3Nh^2}{4\pi m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \exp \left[\frac{2}{3} \frac{S}{Nk_B} - \frac{5}{3} \right] \frac{2}{3} \frac{1}{Nk_B} = T \\ \rightarrow \quad S &= \frac{3Nk_B}{2} \left(\ln \left[\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{5}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(T, V, N) &= E(S, V, N) - \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} S \\ &= \frac{3}{2} Nk_B T - T \frac{3Nk_B}{2} \left(\ln \left[\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{5}{3} \right) \\ &= -T \frac{3Nk_B}{2} \left(\ln \left[\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{2}{3} \right) \\ &= -Nk_B T \left(\ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 1 \right) \end{aligned}$$

Lösungsweg 2 (eleganter):

$$\begin{aligned} F(T, V, N) &= E(S, V, N) - \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} S \\ &= - \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} \left(S - E \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} \right) \\ &= -T \tilde{S}(1/T, V, N) \end{aligned}$$

1.2 Heißluftballon

Für das ideale Gas gilt:

$$pV = Nk_B T \rightarrow p = \frac{N}{V} k_B T$$

$$\rho_{Luft} = \frac{m_{Luft}}{V} = \frac{nM_{Luft}}{V} = \frac{NM_{Luft}}{N_A V} \rightarrow \frac{N}{V} = \frac{N_A \rho_{Luft}}{M_{Luft}}$$

wobei M_{Luft} die molare Masse und $n = N/N_A$ die Stoffmenge ist. Weil der Druck innerhalb und außerhalb des Ballons gleich ist (Dichte im Inneren: ρ):

$$p = p_0 \rightarrow \frac{N_A \rho}{M_{Luft}} k_B T = \frac{N_A \rho_0}{M_{Luft}} k_B T_0 \rightarrow T \rho = T_0 \rho_0 \rightarrow \rho = \frac{T_0}{T} \rho_0$$

Die Schwerkraft beträgt $F_1 = mg$ und der entgegengesetzt zeigende Auftrieb beträgt $F_2 = Vg(\rho_0 - \rho)$. Damit die Masse getragen wird, muss gelten

$$F_1 < F_2 \rightarrow Mg < Vg(\rho_0 - \rho) \rightarrow M < V(\rho_0 - \rho) = \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) V \rho_0$$

Da im Inneren und Äußeren der gleiche Druck $p_1 = p_2$ herrscht, handelt es sich um ein mechanisches Gleichgewicht. (Thermisch: $T_1 = T_2$; chemisch: $\mu_1 = \mu_2$). Allerdings wird sich nach einem längeren Zeitraum ein thermisches und chemisches Gleichgewicht einstellen, und der Ballon herunterfallen.

1.3 Wärmeverbrauch

(a) $dQ = dE = (3/2)Nk_B dT$ (V : fest, d.h. keine Arbeit wird verrichtet)

$$\Delta Q = \Delta E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2} N k_B dT = \frac{3}{2} N k_B (T_2 - T_1)$$

(b) $dQ = dE + P_1 dV = (3/2)Nk_B dT + P_1(Nk_B/P_1)dT$

$$\Delta E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2} N k_B dT = \frac{3}{2} N k_B (T_2 - T_1)$$

$$\Delta Q = \Delta E + \int_{T_1}^{T_2} P_1(Nk_B/P_1)dT = \frac{5}{2} N k_B (T_2 - T_1)$$

(c) $dQ = (3/2)N(T)k_B dT$ (V : fest, d.h. keine Arbeit)

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2} N(T) k_B dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2} \frac{P_1 V_1}{k_B T} k_B dT = \frac{3}{2} P_1 V_1 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Die innere Energie hängt vom betrachteten System ab. Innerhalb des Zimmers bleibt die innere Energie konstant.

$$\Delta E = \frac{3}{2} N(T_2) k_B T_2 - \frac{3}{2} N(T_1) k_B T_1 = 0$$

Wenn man aber das Gesamtsystem betrachtet, dann ist $\Delta E' = \Delta Q$ die Veränderung der inneren Energie des Gases im Zimmer plus dem, was durch das Loch ausgelaufen ist.