

2. Tutoriumfür **25.03.2011****2.1 Jacobi-Determinante**

x und y seien Funktionen von u und v , also $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$.

a) Zeige, dass

$$\left. \frac{\partial v}{\partial u} \right|_y = - \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_u \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_v,$$

wenn das totale Differential dy null ist.

b) Zeige, dass

$$\left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_y = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_u,$$

wobei

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| := \begin{vmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_v & \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_u \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_v & \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_u \end{vmatrix}$$

die Jacobi-Determinante ist.

2.2 Van-der-Waals Gas

Reale Gase können recht gut durch die Van-der-Waals-Gleichung beschrieben werden

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

wobei $n \equiv N/N_A$ die Stoffmenge beschreibt.

*) (freiwillig): Was beschreiben die Parameter a und b physikalisch?

a) Das Gas wird isotherm vom Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 ausgedehnt. Berechne die Änderung der freien Energie.

b) Zeige, dass sich die isotherme Änderung der inneren Energie bei konstanter Teilchenzahl schreiben lässt als:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_{N, T} = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{N, V} - p.$$

c) Berechne damit die isotherme Änderung der inneren Energie bei der Ausdehnung vom Volumen V_1 auf V_2 .

d) Am kritischen Punkt des Gases gilt:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_{N,T} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_{N,T} = 0.$$

Berechne das zu diesem Punkt gehörende kritische Volumen V_c , die kritische Temperatur T_c und den kritischen Druck p_c .

e) Berechne die isothermische Kompressibilität $\kappa_T = \kappa_T(T, V, N)$ mit

$$\kappa_T^{-1} = -V \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_{N,T}$$

und bestimme den kritischen Exponenten γ in der Nähe des kritischen Punktes, an welchem $\kappa_T = \kappa_T(T, V_c, N) \sim |T - T_c|^{-\gamma}$ gilt.

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2a, 2bc, 2de