3. Tutorium - Lösungen **01.04.2011**

3.1 Isentrope Expansion

*) Siehe Wikipedia-Artikel „Freiheitsgrad".
1-atomig: 3 Translationsfreiheitsgrade.
2-atomig: 3 Translations-, 2 Rotations, und 2x1 Schwingungsfreiheitsgrad (1x kinetisch + 1x potentiell) = 7.
Rotation und Schwingung sind quantisiert, weshalb bei niedrigeren Energien einzelne Freiheitsgrade „eingefroren" sein können.
a)

$$\mathrm{d}E = N\frac{f}{2}k_B\mathrm{d}T = -p\mathrm{d}V \qquad \text{mit}\,\mathrm{d}T = \mathrm{d}(pV)/(Nk_B)$$

$$\frac{f}{2}\left(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p\right) = -p\mathrm{d}V$$

$$(f+2)\,\frac{\mathrm{d}V}{V} = -f\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

Integration ergibt

$$\ln V^{-\frac{f+2}{f}} = \ln p + \text{const}$$

$$pV^{\frac{f+2}{f}} = pV^{\kappa} = \text{const} \quad \rightarrow \quad \kappa = \frac{f+2}{f}$$

b)

$$C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{V,N} = N\frac{f}{2}k_B, \quad C_p = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_{p,N} = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{p,N} + \left.\frac{\partial (pV)}{\partial T}\right|_{p,N} = N\frac{f}{2}k_B + Nk_B = N\frac{f+2}{2}k_B$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$$

3.2 Otto-Kreisprozess

a) $1 \rightarrow 2$: isentrope Kompression:

$$p_2V_2^{\kappa} = p_1V_1^{\kappa} \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}.$$

$$\frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_1V_1}{T_1} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}.$$

$2 \rightarrow 3$: isochore Wärmezufuhr: $V_3 = V_2$

$$\frac{p_3V_3}{T_3} = \frac{p_2V_2}{T_2} \quad \rightarrow \quad p_3 = p_2\frac{T_3}{T_2} = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}\frac{T_3}{T_1}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa} = p_1\frac{T_3}{T_1}\frac{V_1}{V_2}$$

$3 \rightarrow 4$: isentrope Expansion: Aus dem letzten Schritt folgt: $V_4 = V_1$

$$p_4V_4^{\kappa} = p_3V_3^{\kappa} \quad \rightarrow \quad p_4 = p_3\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa} = p_1\frac{T_3}{T_1}\frac{V_1}{V_2}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa} = p_1\frac{T_3}{T_1}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa}.$$

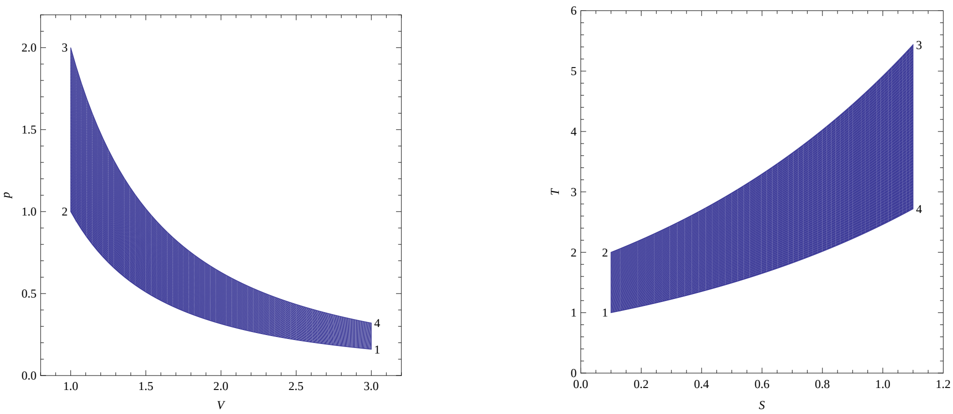
$$\frac{p_4 V_4}{T_4} = \frac{p_3 V_3}{T_3} \quad \to \quad T_4 = T_3 \frac{p_4 V_4}{p_3 V_3} = T_3 \frac{p_1 \frac{T_3}{T_1} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa}}{p_1 \frac{T_3}{T_1} \frac{V_1}{V_2}} \frac{V_1}{V_2} = T_3 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa}.$$

b) $S_2 = S_1$ und $S_4 = S_3$ da isentrope Änderung (d.h. Entropie bleibt erhalten).

$$C_V = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{V,N} \quad \to \quad S_3 - S_2 = \int_{T_2}^{T_3} \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{V,N} \mathrm{d}T = \int_{T_2}^{T_3} \frac{C_V}{T} \mathrm{d}T$$

$$S_3 = S_2 + C_V \ln \frac{T_3}{T_2} = S_2 + C_V \ln \left[\frac{T_3}{T_1} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa}\right]$$

c)



*) Siehe Wikipedia-Eintrag für „Otto-Kreisprozess“.
Zündkerze ist $2 \to 3$. Isochore Wärmeabfuhr ist durch Austausch des Gases realisiert, was zwei zusätzliche Takte benötigt.
d)

$$Q_{1\to 2} = 0.$$

$$Q_{2\to 3} = \int_{T_2}^{T_3} C_V \mathrm{d}T = C_V (T_3 - T_2) = C_V \left[T_3 - T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}\right].$$

$$Q_{3\to 4} = 0.$$

$$Q_{4\to 1} = \int_{T_4}^{T_1} C_V \mathrm{d}T = C_V (T_1 - T_4) = C_V \left[T_1 - T_3 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa}\right].$$

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= -\int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2} p_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\kappa} \mathrm{d}V = -p_1 V_1^{\kappa} \left(\frac{V_2^{1-\kappa}}{1-\kappa} - \frac{V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right) \\ &= \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right] = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \frac{N k_B}{\kappa - 1} (T_2 - T_1) = C_V (T_2 - T_1) \\ &= C_V T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right]. \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet $(V_1/V_2)^{\kappa-1} = T_2/T_1$ (siehe (a) $1 \to 2$ oben bzw. (f) unten), $\kappa - 1 = \frac{2}{f}$, und $C_V = N k_B \frac{f}{2}$. Alternativ könnte man mit den Überlegungen aus dem 2. Plenum direkt schreiben $W_{1\to 2} = C_V (T_2 - T_1)$.

$$W_{2\to 3} = 0.$$

$$
\begin{aligned}
W_{3\to 4} &= -\int_{V_3}^{V_4} p\mathrm{d}V = -\int_{V_3}^{V_4} p_3 \left(\frac{V_3}{V}\right)^{\kappa} \mathrm{d}V = -p_3 V_3^{\kappa} \left(\frac{V_4^{1-\kappa}}{1-\kappa} - \frac{V_3^{1-\kappa}}{1-\kappa}\right) \\
&= \frac{p_3 V_3}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1} - 1\right] = C_V\,(T_4 - T_3) = C_V T_3 \left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa} - 1\right).
\end{aligned}
$$

e) Wirkungsgrad berechnet man am einfachsten durch

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{|W_{\text{gesamt}}|}{Q_{\text{zugeführt}}} = \frac{|\sum_{i=1}^{4} W_{i\to i+1}|}{Q_{2\to 3}} = \frac{|\sum_{i=1}^{4} Q_{i\to i+1}|}{Q_{2\to 3}} = \frac{Q_{2\to 3} + Q_{4\to 1}}{Q_{2\to 3}} \\
&= \left[T_3 - T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} + T_1 - T_3 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa}\right] \Big/ \left[T_3 - T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}\right] \\
&= \left\{\left[T_3 - T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}\right] \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa}\right]\right\} \Big/ \left[T_3 - T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}\right] \\
&= 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\kappa} = 1 - \varepsilon^{1-\kappa}
\end{aligned}
$$

f) Die Gleichung $p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$ durch $p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2$ dividieren ergibt $(V_1/V_2)^{1-\kappa} = T_1/T_2$ (siehe auch (a) $1 \to 2$ oben).

$$
\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa} = 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = \eta_c
$$