

4. Tutorium

für 08.04.2011

4.1 Einstein-Modell

Das Einstein-Modell beschreibt einen Festkörper durch N Oszillatoren mit der Frequenz ω . Die Hamiltonfunktion des Festkörpers ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right)$$

a) Berechne das Phasenraumvolumen $\Phi(E)$ und die Anzahl der Zustände $\Omega(E)$. Das System ist im mikrokanonischen Ensemble ($H = E$). Hinweis: Die Formel für die Berechnung des Volumens einer d -dimensionalen Kugel findet sich im Anhang A.4 des Skriptums.

b) Berechne die Entropie $S(E, V, N)$. Bilde den Limes für große Teilchenzahl mit Hilfe der Stirling-Formel.

c) Leite aus der erzeugenden Funktion $S(E, V, N)$ die Relationen für Temperatur und Druck ab. Überrascht das Ergebnis für den Druck?

d) Berechne mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung $E(T, V, N)$ die Wärmekapazität C_V .

e) Der Festkörper ist durch eine wärmeleitende Wand von einem idealen Gas getrennt. Das Gesamtsystem hat die Energie $E' (> E)$. Das Gas von N'' Teilchen und der Energie E'' befindet sich in einem Volumen V'' . Berechne die Aufteilung der Gesamtenergie.

Hinweis: Die Anzahl der Zustände des Gases ist gegeben durch

$$\Omega_{\text{gas}} = \frac{1}{N''!} \frac{1}{h^{3N''}} V^{N''} \frac{(2\pi m E'')^{3N''/2}}{(3N''/2) \Gamma(3N''/2)}.$$

4.2 Zweidimensionales Gas¹

Gegeben sei ein Gas, das aus N zweiatomigen Molekülen in einem zweidimensionalen Kasten (Volumen: V) besteht. Wenn die Schwingung zwischen den zwei Atomen eines Moleküls eingefroren ist und nur die Translationen (x_i, y_i) und Drehungen $(\theta_i \in [0, 2\pi])$ der Moleküle betrachtet werden, lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_{x,i}^2}{2m} + \frac{p_{y,i}^2}{2m} + \frac{L_i^2}{2I} \right).$$

¹Früheres Testbeispiel.

L ist der Drehimpuls und I das Trägheitsmoment. Es gibt keine Wechselwirkung zwischen den Molekülen.

a) Berechne die Anzahl der Zustände auf der Energieschale $[E - \Delta, E]$. Nimm an, dass $N \gg 1$.

b) Berechne die Entropie S , die Temperatur T und die Wärmekapazität C_V des Systems.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 1e, 2a, 2b