**5. Tutorium** **für 13.05.2011**

## 5.1 Fockraum

Zwei nicht-wechselwirkende harmonische Oszillatoren haben folgende Energieeigenzustände:

$$\hat{H}\,|\phi_m,\phi_n\rangle = (E_m + E_n)\,|\phi_m,\phi_n\rangle$$

mit $E_n = \hbar\omega\,(n+1/2)$ und $|\phi_m,\phi_n\rangle = |\phi_m\rangle_1 \otimes |\phi_n\rangle_2$.
Für den zugehörigen Fock-Zustand $|\Psi\rangle = |n_0, n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle$, der die Besetzungszahlen $n_i$ zur Energie $E_i$ enthält, wird folgende Kurz-Notation eingeführt:

$$|\Psi(i,j)\rangle = \begin{cases} |0,0,\ldots,0,n_i=1,0,\ldots,0,n_j=1,0,\ldots\rangle & \text{für } i<j, \\ |0,0,\ldots,0,n_i=2,0,\ldots\rangle & \text{für } i=j. \end{cases}$$

a) Schreibe den normierten Fock-Zustand $|\Psi(i,j)\rangle$ als Summe von Eigenzuständen der harmonischen Oszillatoren $|\phi_m,\phi_n\rangle$.
*) (unfreiwillig) Rufe Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für den harmonischen Oszillator aus der Quantentheorie-Vorlesung ins Gedächtnis (Falls Skriptum nicht zur Hand, siehe z.B. Wikipedia-Artikel über „Erzeugungs- und Vernichtungsoperator“).
b) Berechne die Matrixelemente $\langle\Psi(i,j)|\, b_s^\dagger b_s\, |\Psi(k,l)\rangle$, wobei $b_s^\dagger$ und $b_s$ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für den $s$-ten harmonischen Oszillator sind ($s=1$ oder $s=2$; keine Einsteinsche Summenkonvention!).
c) Berechne die Matrixelemente $\langle\Psi(i,j)|\, a_t^\dagger a_t\, |\Psi(k,l)\rangle$, wobei $a_t^\dagger$ und $a_t$ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Fockraum sind, die auf die $t$-te Besetzungszahl $n_t$ wirken:

$$\begin{aligned} a_t\,|\ldots,n_t,\ldots\rangle &= \sqrt{n_t}\,|\ldots,n_t-1,\ldots\rangle \\ a_t^\dagger\,|\ldots,n_t,\ldots\rangle &= \sqrt{n_t+1}\,|\ldots,n_t+1,\ldots\rangle\,. \end{aligned}$$

d) Zeige, dass

$$\hbar\omega\left(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + 1\right) = \sum_t \hbar\omega\left(t+\frac{1}{2}\right) a_t^\dagger a_t.$$

BITTE WENDEN

## 5.2 Zweizustandssystem

Gegeben sei ein Zweizustandssystem mit dem Hamiltonoperator für das $i$-te Teilchen

$$H_i = E_0 \left|1\right\rangle_i \left\langle 1\right|_i - E_0 \left|2\right\rangle_i \left\langle 2\right|_i .$$

Berechne die zugehörige großkanonische Zustandssumme, das großkanonische Potential, und die Teilchenfluktuation $(\Delta N)^2 = \left\langle (N - \langle N \rangle)^2 \right\rangle$ für den Fall, dass die Teilchen
a) (ununterscheidbare) Bosonen sind,
b) (ununterscheidbare) Fermionen sind,
c) der Maxwell-Boltzmann-Statistik folgen.

---

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 1d, 2ab, 2c