

6. Tutorium**für 27.05.2011****6.1 Harmonische Falle**

Gegeben sei ein ideales Gas in einer harmonischen Falle. Die Hamiltonfunktion jedes Teilchens im Gas ist gegeben durch

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x, y, z) \quad \text{mit } V(x, y, z) = m\omega^2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Das Gas ist in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T und mit einem Teilchenbad des chemischen Potentials μ (d.h. der Austausch von Teilchen mit dem Teilchenbad ist zugelassen).

a) Berechne die großkanonische Zustandssumme für ein klassisches System von punktförmigen Teilchen.

b) Zeige, dass

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{GK} + \mu \langle N \rangle,$$

und berechne damit den Mittelwert der gesamten Energie des Gases $\langle E \rangle$.

c) Berechne das Phasenraumvolumen $\Phi(E)$ und die Zustandsdichte

$$D(E) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Omega(E; \Delta)}{\Delta} = \frac{1}{N! h^{3N}} \frac{d\Phi}{dE}$$

für ein einzelnes Teilchen ($N = 1$) in einer D -dimensionalen harmonischen Falle. (Dieses Resultat wird in 6.2cd benötigt).

BITTE WENDEN

6.2 Bose-Einstein Kondensation

Gegeben sei die gleiche Hamiltonfunktion wie in Beispiel 6.1, nur sind die Teilchen ununterscheidbare Bosonen.

- Berechne die großkanonische Zustandssumme für ein ideales Bosegas.
- Berechne den Erwartungswert der Anzahl der Bosonen N_{n_x, n_y, n_z} im Zustand¹ (n_x, n_y, n_z) .
- Bose-Einstein-Kondensation wird beobachtet, wenn im Limes $T \rightarrow 0$ die Anzahl der Bosonen im Grundzustand $\langle N_{0,0,0} \rangle$ (viel) größer als die Anzahl in angeregten Zuständen

$$\langle N_{\epsilon > 0} \rangle = \sum_{(n_x, n_y, n_z) \neq (0,0,0)} \langle N_{n_x, n_y, n_z} \rangle$$

wird. Bose-Einstein-Kondensation kann angenommen werden, wenn die Anzahl der Bosonen im Grundzustand im Limes $T \rightarrow 0$ und $\mu(T) \rightarrow \mu_c$ divergiert ($\langle N_{0,0,0} \rangle \rightarrow \infty$) während die Anzahl in den angeregten Zuständen endlich bleibt. Wie groß ist der kritische Wert des chemischen Potentials μ_c für das Bosegas in der harmonischen Falle? Zeige durch Näherung der Summe durch ein geeignetes Integral, dass im Limes $\mu(T) \rightarrow \mu_c$ gilt

$$\langle N_{\epsilon > 0} \rangle \rightarrow \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3.$$

- Kann in einer in zwei- oder eindimensionalen harmonischen Falle ein Bose-Einstein-Kondensat entstehen?

Hinweise:

$$\int_0^\infty x^2 / (e^x - 1) dx = 2\zeta(3) \approx 2.40,$$

$$\int_0^\infty x / (e^x - 1) dx = \pi^2/6 \approx 1.64,$$

$$\text{Riemannsche Zetafunktion: } \zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}.$$

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2a, 2b, 2cd

¹Die Quantenzahlen $n_x \geq 0$, $n_y \geq 0$, und $n_z \geq 0$ nummerieren die jeweiligen Eigenzustände des harmonischen Oszillators in x -, y -, und z -Richtung.