Projektarbeit aus Superstring–Theorie

κ–Symmetrie

und deren Abwandlung im BRS–Formalismus

Von Gernot Pauschenwein
bei Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Maximilian Kreuzer
November 2002
Institut für Theoretische Physik, TU Wien

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Im ersten Kapitel wird die κ–Symmetrie, wie sie in [1] behandelt wird nachgerechnet, sowohl für das supersymmetrische Punktteilchen als auch für den Superstring, wobei man in der Wirkung Kopplungen zwischen Links- und Rechtsläufern einführen muss.

Im zweiten Kapitel wird ein Zusammenhang zwischen der Superstring–Wirkung aus dem ersten Kapitel und der in [2] verwendeten hergestellt. Dazu muss von einer Minkowski–Wirkung zu einer konformen übergegangen werden.
Außerdem wird dabei gezeigt, wie die Links–Rechts–Kopplung mitberücksichtigt werden kann.

Abschließend wird nach [6] eine Wirkung aufgebaut, die die κ–Symmetrie in abgewandelter Form als BRS–Transformation erfüllt.

Kapitel 1

Die κ–Symmetrie

1.1 Das supersymmetrische Punktteilchen

Die einfachste Wirkung für das supersymmetrische Punktteilchen lautet

$$S = \frac{1}{2} \int e^{-1} \left(\dot{x}^\mu - i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \dot{\theta}^A \right)^2 d\tau, \tag{1.1}$$

wobei $\dot{x}^\mu - i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \dot{\theta}^A = p^\mu$ und die θ^A N antikommutierende (Majorana-Weyl) Spinoren sind (N ist die Anzahl der Supersymmetrien). Daraus folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{array}{rll} \dot{p}^\mu = 0 & \ldots \text{Variation nach } x^\mu, & \\ \Gamma \cdot p\dot{\theta}^A = 0 & \ldots \quad\quad - '' - & \bar{\theta}^A \text{ und} \\ p^2 = 0 & \ldots \quad\quad - '' - & \text{der Metrik } e. \end{array} \tag{1.2}$$

Die SUSY–Transformation lautet

$$\begin{array}{ll} \delta\theta^A = \epsilon^A & \delta x^\mu = i\bar{\epsilon}^A \Gamma^\mu \theta^A \\ \delta\bar{\theta}^A = \bar{\epsilon}^A & \delta e = 0, \end{array} \tag{1.3}$$

was man leicht verifizieren kann:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d\tau\, e^{-1} p_\mu \left(\delta\dot{x}^\mu - i\delta\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \dot{\theta}^A - i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\dot{\theta}^A \right) \\ &= \int d\tau\, e^{-1} \left(p_\mu i\bar{\epsilon}^A \Gamma^\mu \dot{\theta}^A - p_\mu i\bar{\epsilon}^A \Gamma^\mu \dot{\theta}^A - 0 \right) = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Betrachten wir nun N infinitesimale, von der Zeit abhängige Grassman Spinoren $\kappa^A(\tau)$ zusammen mit folgender Transformation:

$$\delta\theta^A = i\Gamma \cdot p\kappa^A \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= i\bar\theta^A\Gamma^\mu\delta\theta^A & (1.6)\\ \delta e &= 4e\dot{\bar\theta}^A\kappa^A. & (1.7)\end{aligned}$$

Diese liefert mit Hilfe eines Majorana–Flips ($\bar\epsilon_2\Gamma^\mu\epsilon_1 = -\bar\epsilon_1\Gamma^\mu\epsilon_2$)

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S &= \int d\tau \left[\left(-\frac{1}{2e^2}\right)\delta e\, p^2 + \frac{1}{e}p_\mu\left(\delta\dot x^\mu - i\delta\bar\theta^A\Gamma^\mu\dot\theta^A - i\bar\theta^A\Gamma^\mu\delta\dot\theta^A\right)\right] = \\ &= \int d\tau\, e^{-1}\left(-2\dot{\bar\theta}^A\kappa^A p^2 + p_\mu\left[\left(i\bar\theta^A\Gamma^\mu\delta\theta^A\right)^\bullet + i\dot{\bar\theta}^A\Gamma^\mu\delta\theta - i\bar\theta^A\Gamma^\mu\left(i\Gamma^\nu p_\nu\kappa^A\right)^\bullet\right]\right) = \\ &= \int d\tau\, e^{-1}\left(-2\dot{\bar\theta}^A\kappa^A p^2 - 2p_\mu\dot{\bar\theta}^A\Gamma^\mu\Gamma^\nu p_\nu\kappa^A\right) = 0\,, \qquad (1.8)\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $(\Gamma\cdot p)^2 = -p^2$ verwendet wurde.

1.2 Der Superstring

In Analogie zum Punktteilchen kann man eine Wirkung anschreiben

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\,\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\Pi_\alpha\cdot\Pi_\beta\,, \qquad (1.9)$$

wobei

$$\Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha X^\mu - i\bar\theta^A\partial_\alpha\theta^A\,. \qquad (1.10)$$

Dabei geht allerdings die lokale κ–Symmetrie verloren, weswegen die Wirkung erweitert werden muss, und zwar mit

$$S_2 = \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\,\left[-i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\left(\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right) + \epsilon^{\alpha\beta}\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right]\,. \qquad (1.11)$$

S_2 besitzt keine Abhängigkeit von $h^{\alpha\beta}$, daher trägt dieser Teil der Wirkung auch nicht zum Energie–Impuls–Tensor $T_{\alpha\beta}$ bei. Überprüfen wir die globale $N=2$ Supersymmetrie mit $\delta\theta^A = \epsilon^A$ und $\delta X^\mu = i\bar\epsilon^A\Gamma^\mu\theta^A$:

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\,\left[-i\epsilon^{\alpha\beta}\left(i\bar\epsilon^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1 + i\bar\epsilon^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\right)\left(\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right) + \right.\\ &\quad \left. -i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\left(\bar\epsilon^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar\epsilon^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right) + \epsilon^{\alpha\beta}\bar\epsilon^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2 + \epsilon^{\alpha\beta}\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar\epsilon^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right]\\ &= \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\,\epsilon^{\alpha\beta}\left[\bar\epsilon^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar\epsilon^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right]\,, \qquad (1.12)\end{aligned}$$

Terme wie

$$\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\bar\epsilon^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 \qquad (1.13)$$

sind totale Ableitungen, und das ϵ–Symbol garantiert $\epsilon^{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} = \epsilon^{\beta\alpha} A_{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$. Der Integrand besteht nun aus zwei Äquivalenten Termen in θ^1 und θ^2, solch ein Term lautet (wir lassen den SUSY-Superscript weg)

$$A = \epsilon^{\alpha\beta} \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \partial_\alpha \theta \bar{\epsilon}\theta \Gamma_\mu \partial_\beta \theta = \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \dot{\theta}\bar{\theta}\Gamma_\mu \theta' - \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta' \bar{\theta}\Gamma_\mu \dot{\theta} = A_1 + A_2 \; . \tag{1.14}$$

Die Aufteilung in A_1 und A_2 sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{3}\left(\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \dot{\theta}\bar{\theta}\Gamma_\mu \theta' + \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta' \dot{\bar{\theta}}\Gamma_\mu \theta + \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta \bar{\theta}' \Gamma_\mu \dot{\theta}\right) && (1.15) \\ A_2 &= \frac{1}{3}\left(\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \dot{\theta}\bar{\theta}\Gamma_\mu \theta' + \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta' \dot{\bar{\theta}}\Gamma_\mu \theta - 2\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta \bar{\theta}' \Gamma_\mu \dot{\theta}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta\bar{\theta}\Gamma_\mu \theta'\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta\bar{\theta}\Gamma_\mu \dot{\theta}\right) \; . && (1.16) \end{aligned}$$

Bei dieser Zerlegung [1] errreicht man ein Verschwinden von A_2, da dieser Teil wiederum eine totale Abelitung ist, was nur A_1 übriglässt, welches in folgender Form geschrieben werden kann

$$A_1 = 2\bar{\epsilon}\Gamma_\mu \psi_{[1} \bar{\psi}_2 \Gamma^\mu \psi_{3]} \; , \tag{1.17}$$

wobei die eckige Klammer bedeutet, dass die Spinoren $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (\theta, \theta', \dot{\theta})$ antisymmetrisiert sind.
Dieser Ausdruck verschwindet bei folgenden Gegebenheiten:

i $D = 3$ und θ ist Majorana,

ii $D = 4$ und θ ist Majorana oder Weyl,

iii $D = 6$ und θ ist Weyl[2],

iv $D = 10$ und θ ist Majorana-Weyl.

Das bedeutet, der klassische Superstring existiert nur in diesen 4 Fällen, wobei der Fall $D = 10$ für uns am interessantesten ist.

---

[1]

$$\frac{2}{3}\left(\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \dot{\theta}\bar{\theta}\Gamma_\mu \theta' + \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta' \dot{\bar{\theta}}\Gamma_\mu \theta + \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta \bar{\theta}' \Gamma_\mu \dot{\theta}\right) + \frac{1}{3}\left(\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \dot{\theta}\bar{\theta}\Gamma_\mu \theta' + \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta' \dot{\bar{\theta}}\Gamma_\mu \theta - 2\bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta \bar{\theta}' \Gamma_\mu \dot{\theta}\right) = \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \dot{\theta}\bar{\theta}\Gamma_\mu \theta' + \bar{\epsilon}\Gamma^\mu \theta' \underbrace{\dot{\bar{\theta}}\Gamma_\mu \theta}_{=-\bar{\theta}\Gamma_\mu \dot{\theta}}$$

[2]Wenn θ Weyl und nicht Majorana ist, muss $\bar{\theta}\Gamma^\mu \partial_\alpha \theta$ durch $(\bar{\theta}\Gamma^\mu \partial_\alpha \theta - \partial_\alpha \bar{\theta}\Gamma^\mu \theta)/2$ ersetzt werden.

Konstruieren wir fogende Projektionsoperatoren[3] , die selbst–dual bzw. anti–selbst–dual genannt werden:

$$P_{\pm}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha\beta} \pm \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}}\right) \tag{1.18}$$

Die κ^A–Parameter sollen nun ant–selbst–dual für $A = 1$ und selbst–dual für $A = 2$ sein:

$$\begin{aligned} \kappa^{1\alpha} &= P_{-}^{\alpha\beta}\kappa_{\beta}^{1} \ , && (1.19)\\ \kappa^{2\alpha} &= P_{+}^{\alpha\beta}\kappa_{\beta}^{2} \ , && (1.20) \end{aligned}$$

was dazu führt, dass $A = 1$ Rechtsläufer und $A = 2$ Linksläufer beschreibt. Setzen wir nun in Analogie zum Punktteilchen

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= 2i\Gamma \cdot \Pi_\alpha \kappa^{A\alpha} && (1.21)\\ \delta X^\mu &= i\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A \ , && (1.22) \end{aligned}$$

lassen jedoch $\delta h_{\alpha\beta}$ noch offen, so erhalten wir in einem ersten Schritt

$$\delta\Pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha\left(i\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\delta\theta^A\right) - i\delta\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A - i\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\delta\theta^A = 2i\partial_\alpha\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\delta\theta^A \ . \tag{1.23}$$

Gehen wir in der Lagrangedichte $L = L_1 + L_2$ nun von X^μ zu Π^μ über, so erhalten wir (der Faktor $1/\pi$ wird fallengelassen)

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta && (1.24)\\ L_2 &= -i\epsilon^{\alpha\beta}\left(\Pi_\alpha^\mu + i\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A\right)\left(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right) + \epsilon^{\alpha\beta}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2 = \\ &= -i\epsilon^{\alpha\beta}\Pi_\alpha^\mu\left(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right) + \epsilon^{\alpha\beta}\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 \ , && (1.25) \end{aligned}$$

wobei die Antisymmetrie des ϵ–Symbols verwendet wurde. Variieren wir nun diese Ausdrücke, so folgt

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= -\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\Pi_\alpha^\mu 2i\partial_\beta\bar{\theta}^A\Gamma_\mu\delta\theta^A - \frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\right)\Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta && (1.26)\\ \delta L_2 &= -i\epsilon^{\alpha\beta}\Pi_\alpha^\mu\left(\delta\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\delta\theta^1 - \delta\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2 - \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\delta\theta^2\right) + \\ &\quad -i\epsilon^{\alpha\beta}2i\partial_\alpha\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\delta\theta^A\left(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right) + \epsilon^{\alpha\beta}\left(\delta\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\delta\theta^2\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\delta\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\delta\theta^1\right) \ . && (1.27) \end{aligned}$$

---

[3]Zum Beweis der Projektionseigenschaft benötigt man die Formel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|det()|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und die Symmetrie des metrischen Tensors.

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned}
-i\epsilon^{\alpha\beta}\Pi^\mu_\alpha\bar\theta\Gamma_\mu\partial_\beta\delta\theta &= +i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\left(\Pi^\mu_\alpha\bar\theta\right)\Gamma_\mu\delta\theta = \\
&= i\epsilon^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu - i\partial_\beta\bar\theta^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A\bar\theta - i\bar\theta^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\partial_\beta\theta^A\bar\theta + \Pi^\mu_\alpha\partial_\beta\bar\theta\right)\Gamma_\mu\delta\theta \\
&= i\epsilon^{\alpha\beta}\Pi^\mu_\alpha\partial_\beta\bar\theta\Gamma_\mu\delta\theta + \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A\bar\theta\Gamma_\mu\delta\theta \qquad (1.28)
\end{aligned}$$

und Verwendung des Majorana–Flips lässt sich dies aufsummieren zu

$$\begin{aligned}
\delta L \;=\; & -\frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\right)\Pi_\alpha\cdot\Pi_\beta + \Pi^\mu_\alpha\left(-2i\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 - 2i\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2+\right. \\
&\left.+2i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 - 2i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2\right) + \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 - \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2 + \\
&+2\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha\bar\theta^A\Gamma^\mu\delta\theta^A\left(\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right) + \epsilon^{\alpha\beta}\left(\delta\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1+\right. \\
&\left.+\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\delta\theta^2\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\delta\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\delta\theta^1\right). \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht betrachten wir nun jene Terme mit und jene ohne Π getrennt

$$\begin{aligned}
\delta L_{(\mathrm{ohne}\,\Pi)} \;=\; \epsilon^{\alpha\beta}\Big(& \partial_\beta\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 + 2\partial_\alpha\bar\theta^1\Gamma^\mu\delta\theta^1\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \partial_\beta\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2 + \\
& -2\partial_\alpha\bar\theta^2\Gamma^\mu\delta\theta^2\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2 + \\
& \left.\begin{aligned}&+\partial_\beta\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 - 2\partial_\alpha\bar\theta^1\Gamma^\mu\delta\theta^1\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2 + \bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\delta\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \\ &+\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\delta\theta^1 +\end{aligned}\right\} A_{\alpha\beta} \\
& \left.\begin{aligned}&-\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2 + 2\partial_\alpha\bar\theta^2\Gamma^\mu\delta\theta^2\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \delta\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^2\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 + \\ &+\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_\alpha\delta\theta^2\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1\Big)\end{aligned}\right\} B_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

$$(1.30)$$

Mittels partieller Intetgration und Ausnutzung der Antisymmetrie von ϵ erkennen wir, dass sowohl $A_{\alpha\beta}$ als auch $B_{\alpha\beta}$ mit $\epsilon^{\alpha\beta}$ kontrahiert Null ergibt. Lassen wir nun α, β von 1 bis 2 laufen und verwenden $\partial_1\theta = \dot\theta$ und $\partial_2\theta = \theta'$, so ergibt sich $\left(\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta = \bar\theta'\Gamma^\mu\dot\theta - \dot{\bar\theta}\Gamma^\mu\theta' = -2\dot{\bar\theta}\Gamma^\mu\theta'\right)$:

$$\begin{aligned}
\delta L_{(\mathrm{ohne}\,\Pi)} &= -2\dot{\bar\theta}^1\Gamma^\mu\theta^{1\prime}\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 + 2\dot{\bar\theta}^1\Gamma^\mu\delta\theta^1\bar\theta^1\Gamma_\mu\theta^{1\prime} - 2\bar\theta^{1\prime}\Gamma^\mu\delta\theta^1\bar\theta^1\Gamma_\mu\dot\theta^1 + \\
&+2\dot{\bar\theta}^2\Gamma^\mu\theta^{2\prime}\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2 - 2\dot{\bar\theta}^2\Gamma^\mu\delta\theta^2\bar\theta^2\Gamma_\mu\theta^{2\prime} - 2\bar\theta^{2\prime}\Gamma^\mu\delta\theta^2\bar\theta^2\Gamma_\mu\dot\theta^2 \qquad (1.31)
\end{aligned}$$

Bevor wir uns dem $\delta L_{(\mathrm{mit}\,\Pi)}$ widmen, betrachten wir

$$P^{\alpha\gamma}_\pm P^{\beta\delta}_\pm = \frac{1}{4}\left(h^{\alpha\gamma}h^{\beta\delta} \pm \frac{\epsilon^{\alpha\gamma}h^{\beta\delta}}{\sqrt{h}} \pm \frac{\epsilon^{\beta\delta}h^{\alpha\gamma}}{\sqrt{h}} + \frac{\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}}{h}\right) \qquad (1.32)$$

Was wir nun gerne hätten wäre, dass man α und β vertauschen kann. Sind γ und δ gleich ist dies leicht zu zeigen, wenn α und β gleich sind ist es unmittelbar einsichtig. Betrachten wir daher den Fall $(\gamma, \delta) = (1, 2)$ und zeigen, dass (1.32) symmetrisch in (α, β) ist:

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) = (1, 2): \quad & 4 \cdot (1.32) = h^{11} h^{22} = \frac{1}{h_{11} h_{22}} = -h^{-1} \\
(\alpha, \beta) = (2, 1): \quad & 4 \cdot (1.32) = -h^{-1}
\end{aligned}$$

Nach analogen Schritten bei $(\gamma, \delta) = (2, 1)$ erhalten wir daher

$$P_{\pm}^{\alpha\gamma} P_{\pm}^{\beta\delta} = P_{\pm}^{\beta\gamma} P_{\pm}^{\alpha\delta}\,, \tag{1.33}$$

was wir später verwenden werden um

$$P_{-}^{\alpha\gamma} \kappa^{1\beta} = P_{-}^{\alpha\gamma} P_{-}^{\beta\delta} \kappa_{\delta}^{1} = P_{-}^{\beta\gamma} \kappa^{1\alpha} \tag{1.34}$$

und

$$P_{+}^{\alpha\gamma} \kappa^{2\beta} = P_{+}^{\alpha\gamma} P_{+}^{\beta\delta} \kappa_{\delta}^{2} = P_{+}^{\beta\gamma} \kappa^{2\alpha} \tag{1.35}$$

zu schreiben. Wenden wir uns nun den Termen mit Π in der Variation Lagrangedichte zu:

$$\begin{aligned}
\delta L_{(\mathrm{mit}\,\Pi)} &= -\frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\right)\Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta + \Pi_\alpha^\mu \Big(-2i\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 + \\
&\quad -2i\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2 + 2i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 - 2i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2\Big) = \\
&= -\frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\right)\Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta + \Pi_\alpha^\mu \Big(-4i\sqrt{h}P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\delta\theta^1 - 4i\sqrt{h}P_+^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^2\Gamma_\mu\delta\theta^2\Big) = \\
&= -\frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\right)\Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta + \Pi_\alpha^\mu \Big(8\sqrt{h}P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Pi_\gamma^\nu\kappa^{1\gamma} + 8\sqrt{h}P_+^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^2\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Pi_\gamma^\nu\kappa^{2\gamma}\Big)
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Mit (1.33) und $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu}$ können wir folgende Umformungen machen:

$$\begin{aligned}
\Pi_\alpha^\mu P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Pi_\gamma^\nu\kappa^{1\gamma} &= \Pi_\alpha^\mu\Pi_\gamma^\nu P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\Gamma_\nu P_-^{\gamma\delta}\kappa_\delta^1 = \\
&= -\Pi_\alpha^\mu\Pi_\gamma^\nu P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\nu\Gamma_\mu P_-^{\gamma\delta}\kappa_\delta^1 - 2\Pi_\alpha^\mu\Pi_\gamma^\nu P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1 g_{\mu\nu}P_-^{\gamma\delta}\kappa_\delta^1 = \\
&= -\underbrace{\Pi_\alpha^\mu\Pi_\gamma^\nu P_-^{\gamma\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\nu\Gamma_\mu P_-^{\alpha\delta}\kappa_\delta^1}_{\alpha\leftrightarrow\gamma,\,\mu\leftrightarrow\nu} - 2\Pi_\alpha\cdot\Pi_\gamma P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1 P_-^{\gamma\delta}\kappa_\delta^1 = \\
&= -\Pi_\alpha^\mu\Pi_\gamma^\nu P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\Gamma_\nu P_-^{\gamma\delta}\kappa_\delta^1 - 2\Pi_\alpha\cdot\Pi_\gamma P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1 P_-^{\gamma\delta}\kappa_\delta^1 \\
&\Downarrow
\end{aligned}$$

$$\Pi_\alpha^\mu P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Pi_\gamma^\nu\kappa^{1\gamma} = -P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\Pi_\alpha\cdot\Pi_\gamma\kappa^{1\gamma} \tag{1.37}$$

Mit der analogen Gleichung für den θ^2–Teil folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\delta L_{(\mathrm{mit}\,\Pi)} &= -\frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\right)\Pi_\alpha\cdot\Pi_\beta - 8\sqrt{h}\left(P_-^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^1\kappa^{1\gamma}\Pi_\alpha\cdot\Pi_\gamma + P_+^{\alpha\beta}\partial_\beta\bar\theta^2\kappa^{2\gamma}\Pi_\alpha\cdot\Pi_\gamma\right) = \\
&= \left(-\frac{1}{2}\delta\left(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\right) - 8\sqrt{h}\left(P_-^{\alpha\gamma}\bar\kappa^{1\beta}\partial_\gamma\theta^1 + P_+^{\alpha\gamma}\bar\kappa^{2\beta}\partial_\gamma\theta^2\right)\right)\Pi_\alpha\cdot\Pi_\beta = 0
\end{aligned}$$

wenn

$$\delta\left(\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\right) = -16\sqrt{h}\left(P_-^{\alpha\gamma}\bar{\kappa}^{1\beta}\partial_\gamma\theta^1 + P_+^{\alpha\gamma}\bar{\kappa}^{2\beta}\partial_\gamma\theta^2\right) . \tag{1.38}$$

Das bedeutet wir erhalten

$$\begin{aligned} \delta L \;\; = \;\; & -2\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\delta\theta^1\dot{\bar{\theta}}^1\Gamma^\mu\theta^{1\prime} + 2\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\theta^{1\prime}\dot{\bar{\theta}}^1\Gamma^\mu\delta\theta^1 - 2\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\dot{\theta}^1\bar{\theta}^{1\prime}\Gamma^\mu\delta\theta^1 + \\ & +2\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\delta\theta^2\dot{\bar{\theta}}^2\Gamma^\mu\theta^{2\prime} - 2\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\theta^{2\prime}\dot{\bar{\theta}}^2\Gamma^\mu\delta\theta^2 - 2\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\dot{\theta}^2\bar{\theta}^{2\prime}\Gamma^\mu\delta\theta^2 \; , \end{aligned} \tag{1.39}$$

das ist exakt jene Kombination, die auch bei der globalen ϵ–Symmetrie aufgetaucht ist, und die in den Fällen (i) – (iv) verschwindet.

Kapitel 2

Constraints und Links–Rechts–Kopplung

Gehen wir von der Superstring–Wirkung aus, wie sie im vorigen Kapitel verwendet wurde

$$S = \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\Pi_\alpha\cdot\Pi_\beta - i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\left(\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right) + \epsilon^{\alpha\beta}\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2 \tag{2.1}$$

mit

$$\Pi^\mu_\alpha = \partial_\alpha X^\mu - i\bar\theta^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A \tag{2.2}$$

und

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Drehen wir mittels der Transformation $\sigma^0 = -i\sigma^2$ bzw. $\partial_0 = \frac{\partial\sigma^2}{\partial\sigma^0}\frac{\partial}{\partial\sigma^2} = i\partial_2$ ins Euklidische und gehen dann über zu $z = \sigma^1 + i\sigma^2$ und $\bar z = \sigma^1 - i\sigma^2$ ($\partial_1 = \partial_z + \partial_{\bar z} = \partial + \bar\partial$, $\partial_2 = i(\partial - \bar\partial)$), so erkennen wir durch

$$\begin{aligned}
\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha A\partial_\beta B &= -\partial_0 A\partial_0 B + \partial_1 A\partial_1 B = \partial_1 A\partial_1 B + \partial_2 A\partial_2 B = \\
&= \partial A\partial B + \bar\partial A\partial B + \partial A\bar\partial B + \bar\partial A\bar\partial B - \partial A\partial B + \bar\partial A\partial B + \partial A\bar\partial B - \bar\partial A\bar\partial B = \\
&= 2(\bar\partial A\partial B + \partial A\bar\partial B)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A\partial_\beta B &= \partial_0 A\partial_1 B - \partial_1 A\partial_0 B = i\partial_2 A\partial_1 B - i\partial_1 A\partial_2 B = \\
&= -\partial A\partial B + \bar\partial A\partial B - \partial A\bar\partial B + \bar\partial A\bar\partial B + \partial A\partial B + \bar\partial A\partial B - \partial A\bar\partial B - \bar\partial A\bar\partial B = \\
&= 2(\bar\partial A\partial B - \partial A\bar\partial B)
\end{aligned}$$

dass sich die Lagrangedichte transformiert zu

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{2}2(\bar{\Pi}\cdot\Pi+\bar{\Pi}\cdot\Pi)-2i\left(\bar{\partial}X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial\theta^1-\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial\theta^2)-\partial X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1-\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2)\right)\\
&\quad +2\left(\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\bar{\partial}\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial\theta^2-\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2\right)\Big]=\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[-\bar{\partial}X\cdot\partial X+i\partial X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1+\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2)+i\bar{\partial}X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial\theta^1+\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial\theta^2)+\\
&\quad +\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2+\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1+\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial\theta^2\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1+\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial\theta^2\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2+\\
&\quad -i\bar{\partial}X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial\theta^1-\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial\theta^2)+i\partial X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1-\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2)+\\
&\quad +\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\bar{\partial}\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial\theta^2-\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2\Big]=\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[-\bar{\partial}X\cdot\partial X+2i\partial X^\mu\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1+2i\bar{\partial}X^\mu\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial\theta^2+\\
&\quad +\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1+\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial\theta^2\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2+2\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2\Big]. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Mit den Reskalierungen $X^\mu \to -\frac{i}{2}x^\mu$ und $\theta^1 \to \frac{1}{2}\theta$, $\theta^2 \to \frac{1}{2}\hat{\theta}$ ergibt sich (bei $\Gamma^0 = \mathbb{1}$)

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{2}\partial x^\mu\bar{\partial}x_\mu+\frac{1}{2}\partial x_\mu\gamma^\mu_{\alpha\beta}\theta^\alpha\bar{\partial}\theta^\beta+\frac{1}{2}\bar{\partial}x_\mu\gamma^\mu_{\alpha\beta}\hat{\theta}^\alpha\partial\hat{\theta}^\beta\\
&\quad +\frac{1}{8}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\alpha\bar{\partial}\theta^\beta\theta^\gamma\partial\theta^\delta+\frac{1}{8}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\hat{\theta}^\alpha\partial\hat{\theta}^\beta\hat{\theta}^\gamma\bar{\partial}\hat{\theta}^\delta+\frac{1}{4}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\alpha\bar{\partial}\theta^\beta\hat{\theta}^\gamma\partial\hat{\theta}^\delta\Big], \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

was man mit dem Constraint $d_\beta = 0$ als

$$L = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\partial x^\mu\bar{\partial}x_\mu+p_\beta\bar{\partial}\theta^\beta+\hat{p}_\beta\partial\hat{\theta}^\beta+\frac{1}{4}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\alpha\bar{\partial}\theta^\beta\hat{\theta}^\gamma\partial\hat{\theta}^\delta\right] \qquad (2.6)$$

schreiben kann, wobei

$$d_\beta = p_\beta-\frac{1}{2}\partial x_\mu\gamma^\mu_{\alpha\beta}\theta^\alpha-\frac{1}{8}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\alpha\ \theta^\gamma\partial\theta^\delta. \qquad (2.7)$$

Lässt man den Term mit der Wechselwirkung zwischen θ und $\hat{\theta}$ weg, so erhält man die Wirkung aus [2].
Nun können wir diesen WW–Term zusätzlich in die Constraints stecken, die dann folgende Gestalt annehmen:

$$d_\beta = p_\beta-\frac{1}{2}\partial x_\mu\gamma^\mu_{\alpha\beta}\theta^\alpha-\frac{1}{8}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\alpha\ \theta^\gamma\partial\theta^\delta-\frac{1}{8}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\alpha\hat{\theta}^\gamma\partial\hat{\theta}^\delta \qquad (2.8)$$

bzw.

$$\hat{d}_\beta = \hat{p}_\beta-\frac{1}{2}\bar{\partial}x_\mu\gamma^\mu_{\alpha\beta}\hat{\theta}^\alpha-\frac{1}{8}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\hat{\theta}^\alpha\ \hat{\theta}^\gamma\bar{\partial}\hat{\theta}^\delta-\frac{1}{8}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\gamma\bar{\partial}\theta^\delta\hat{\theta}^\alpha. \qquad (2.9)$$

Die Wirkung hat dann die einfache Gestalt aus [2]:

$$S \propto \int d^2 z \left(\frac{1}{2} \partial x^\mu \bar{\partial} x_\mu + p_\beta \bar{\partial} \theta^\beta + \hat{p}_\beta \partial \hat{\theta}^\beta \right) \ , \tag{2.10}$$

enthält nun aber die Links–Rechts–Kopplung in den modifizierten Constraints d_β und $\hat{d}_\beta$, die im folgenden Kapitel in anderem Zusammenhang erneut auftauchen werden.

Kapitel 3

BRST invariante Quanten–Wirkung

In diesem Kapitel konstruieren wir nach [6] ein BRST–invariante Wirkung, wobei einige Ergebnisse aus Kap. 2 verwendet werden können.

3.1 Heterotischer Superstring

Betrachten wir vorerst nur einen (links laufenden) Sektor, wählen konforme Eichung und ersetzen die Größe $2i\Gamma \cdot \Pi_\alpha \kappa^\alpha$ durch einen neuen, lokalen Eichparameter λ. Die neuen Transformationen von X und θ nehmen folgende Gestalt an:

$$\delta_\lambda X^\mu = -i\bar{\lambda}\Gamma^\mu\theta, \quad \delta_\lambda\theta = \lambda \tag{3.1}$$

(3.1) hat die selbe Form wie die BRST Transformation der BRST–Ladung Q_B im Berkovits–Formalismus. Daher interpetieren wir λ als reellen Geist, der seine Statistik ändert: λ wird kommutierend. Die BRST–Transformation mit konstantem, antikommutierendem, antihermiteschem Parameter Λ lautet $\delta_B\theta = i\Lambda\lambda$ und $\delta_B X^\mu = i\Lambda\delta_\lambda X^\mu$. Nennen wir die BRST–Transformation ohne Λ s so erhalten wir $s\theta = i\lambda$ und $sX^\mu = \bar{\lambda}\Gamma^\mu\theta$, was allerdings nicht nilpotent ist. Um dies zu erreichen muss erstens $s\lambda = 0$ gesetzt werden und zweitens bei der X–Transformation ein neuer Geist ξ auf folgende Art und Weise eingeführt werden:

$$sX^\mu = \bar{\lambda}\Gamma^\mu\theta + \xi^\mu, \quad s\xi^\mu = -i\bar{\lambda}\Gamma^\mu\lambda\ . \tag{3.2}$$

Die BRST–Variation des kinetischen Terms der GS–Lagrangedichte folgt daraus zu

$$s\left(\frac{1}{2}\Pi^\mu_\alpha\Pi_{\mu\beta}\right) = \Pi^\mu_{(\alpha}\left(\partial_{\beta)}\xi_\mu + 2\bar{\lambda}\Gamma_\mu\partial_{\beta)}\theta\right)\ . \tag{3.3}$$

Um den Term mit $\partial_\alpha\theta$ loszuwerden (keine Ableitung eines Geistes $\rightarrow$ Noether) modifizieren wir die induzierte Metrik $G_{\alpha\beta} = \Pi_{(\alpha} \cdot \Pi_{\beta)}$ durch Addition eines eichfixierenden Terms:

$$G^{\text{mod}}_{\alpha\beta} = \Pi_{(\alpha} \cdot \Pi_{\beta)} + 2\bar{d}_{(\alpha}\partial_{\beta)}\theta \;, \tag{3.4}$$

wobei d_α ein neues antihermitesches, antikommutierendes Feld ist (das sich analog zu Kap. 2 ergeben wird). Der kinetische Term variiert dann wie folgt:

$$sG^{\text{mod}}_{\alpha\beta} = 2\Pi^\mu_{(\alpha}\partial_{\beta)}\xi_m u + \left(4\bar{\lambda}\Gamma_\mu\Pi^\mu_{(\alpha} + 2s\bar{d}_{(\alpha}\right)\partial_{\beta)}\theta - 2i\bar{d}_\alpha\partial_\beta\lambda \tag{3.5}$$

Die allgemeinste Form für $s\bar{d}_\alpha$ ist $-2\bar{\lambda}\Gamma_\mu\Pi^\mu_\alpha + \partial_\alpha\bar{\chi} + A_\mu\Gamma^\mu\partial_\alpha\bar{\theta}$, durch die Forderung der Nilpotenz von s auf d liefert dies

$$s\bar{d}_\alpha = -2\bar{\lambda}\Gamma_\mu\Pi^\mu_\alpha + \partial_\alpha\bar{\chi} - 2i\xi_\mu\Gamma^\mu\partial_\alpha\bar{\theta} \;, \quad s\bar{\chi} = 2\xi_\mu\bar{\lambda}\Gamma^\mu \;. \tag{3.6}$$

Wir haben daher bisher erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{mod}}_{\text{kin}} &= -\frac{1}{2}\Pi^\mu_\alpha\Pi^\alpha_\mu - \bar{d}_\alpha\partial^\alpha\theta \\ s\mathcal{L}^{\text{mod}}_{\text{kin}} &= -\Pi^\mu_\alpha\partial^\alpha\xi_\mu - \partial_\alpha\bar{\chi}\partial^\alpha\theta + i\bar{d}_\alpha\partial^\alpha\lambda \end{aligned} \tag{3.7}$$

Analog erhalten wir für den WZ-Term

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{mod}}_{\text{WZ}} &= -i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\bar{\theta}\Gamma_\mu\partial_\beta\theta + \epsilon^{\alpha\beta}\bar{d}_\alpha\partial_\beta\theta \\ s\mathcal{L}^{\text{mod}}_{\text{WZ}} &= \epsilon^{\alpha\beta}\left(\Pi^\mu_\alpha\partial_\beta\xi_\mu + \partial_\alpha\bar{\chi}\partial_\beta\theta - i\bar{d}_\alpha\partial_\beta\lambda\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mit Hilfe von $P^{\alpha\beta} = 2\; P^{\alpha\beta}_{-}\Big|_{h=\eta} = \eta^{\alpha\beta} - \epsilon^{\alpha\beta}$ können wir zusammenfassen:

$$s\left(\mathcal{L}^{\text{mod}}_{\text{kin}} + \mathcal{L}^{\text{mod}}_{\text{WZ}}\right) = -\Pi^\mu_\alpha P^{\alpha\beta}\partial_\beta\xi_\mu - \partial_\alpha\bar{\chi}P^{\alpha\beta}\partial_\beta\theta + i\bar{d}_\alpha P^{\alpha\beta}\partial_\beta\lambda \tag{3.9}$$

Der nächste Schritt ist nun, eine freie Geist-Lagrangedichte zu addieren und die passenden Antigeist-Transformationsgesetze zu definieren. Wie in [6] dargelegt wird erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gh}} &= -\beta_{\alpha\mu}P^{\alpha\beta}\partial_\beta\xi^\mu - \bar{\omega}_\alpha P^{\alpha\beta}\partial_\beta\lambda - \partial_\alpha\bar{\chi}P^{\alpha\beta}\kappa_\alpha - bP^{\alpha\beta}\partial_\alpha c_\beta \\ s\beta_{\alpha\mu} &= -\Pi_{\alpha\mu} - 2\bar{\kappa}_\alpha\Gamma_\mu\lambda + b\partial_\alpha\xi_\mu + \frac{1}{2}\partial_\alpha b\xi_\mu \\ s\bar{\omega}_\alpha &= i\bar{d}_\alpha - 2i\beta^\mu_\alpha\bar{\lambda}\Gamma_\mu - 2\xi^\mu\bar{\kappa}_\alpha\Gamma_\mu - i\left(b\partial_\alpha\bar{\chi} + \frac{3}{4}\partial_\alpha b\bar{\chi}\right) \\ s\kappa_\alpha &= -\partial_\alpha\theta + i\left(b\partial_\alpha\lambda + \frac{1}{4}\partial_\alpha b\lambda\right) \\ sb &= 1 \\ sc_\alpha &= -\frac{1}{2}\left(\xi^\mu\partial_\alpha\xi_\mu - \frac{3i}{2}\bar{\chi}\partial_\alpha\lambda + \frac{i}{2}\partial_\alpha\bar{\chi}\lambda\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2 Geschlossener Superstring

Wenden wir nun dieselben Methoden auf die kombinierten links- und rechtslaufenden Sektoren des GS–Superstring an. Die ersten BRST–Transformationsregeln lauten

$$
\begin{aligned}
sX^\mu &= \bar\theta^1\Gamma^\mu\lambda^1 + \xi^{1\mu} + \bar\theta^2\Gamma^\mu\lambda^2 + \xi^{2\mu} \\
s\theta^A &= i\lambda^A \\
s\lambda^A &= 0 \\
s\xi^{A\mu} &= -i\bar\lambda^A\Gamma^\mu\lambda^A \quad \text{(keine Summation)}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Wir addieren die eichfixierenden Terme zu $\mathcal{L}_{\mathrm{GS}}$

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{d}} = -\bar d^1\bar\partial\theta^1 - \bar d^2\partial\theta^2 \ , \tag{3.12}
$$

wobei die d^A so beschaffen sind, dass nur die freien kinetischen Terme von X^μ, θ^A und p^A übrigbleiben:

$$
\begin{aligned}
\bar d^1 &= \bar p^1 + \left(i\partial X^\mu + \tfrac12\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial\theta^1 + \tfrac12\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial\theta^2\right)\bar\theta^1\Gamma_\mu \\
\bar d^2 &= \bar p^2 + \left(i\bar\partial X^\mu + \tfrac12\bar\theta^2\Gamma^\mu\bar\partial\theta^2 + \tfrac12\bar\theta^1\Gamma^\mu\bar\partial\theta^1\right)\bar\theta^2\Gamma_\mu
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Es erweist sich als günstig ein Hilfsfeld für Π_0^μ einzuführen, wir ersetzen $\frac12\left(\Pi_0^\mu\right)^2$ durch $-\frac12 P_0^\mu P_{0\mu} + P_0^\mu\Pi_{0\mu}$.
Wir schreiben nun alle Transformationsgesetze nur mit ∂_1–Ableitungen, was unter Verwendung der freien Feldgleichungen möglich ist und Nilpotenz auf allen Feldern liefert.

$$
\begin{aligned}
s\bar d^1 &= 2\partial_1\bar\chi^1 - 2(\Pi_{1\mu} - P_{0\mu})\Gamma^\mu\lambda^1 - 4i\bar\xi^1_\mu\Gamma^\mu\partial_1\theta^1 \\
s\bar d^2 &= 2\partial_1\bar\chi^2 - 2(\Pi_{1\mu} + P_{0\mu})\Gamma^\mu\lambda^2 - 4i\bar\xi^2_\mu\Gamma^\mu\partial_1\theta^2 \\
sP_0^\mu &= -2\bar\lambda^1\Gamma^\mu\partial_1\theta^1 + 2\bar\lambda^2\Gamma^\mu\partial_1\theta^2 - \partial_1\xi^{1\mu} + \partial_1\xi^{2\mu} \\
s\Pi_1^\mu &= 2\bar\lambda^1\Gamma^\mu\partial_1\theta^1 + 2\bar\lambda^2\Gamma^\mu\partial_1\theta^2 + \partial_1\xi^{1\mu} + \partial_1\xi^{2\mu} \\
s\bar\chi^A &= 2\xi^{A\mu}\bar\lambda^A\Gamma_\mu \quad \text{(keine Summation)}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Es folgt:

$$
sS = \int d^2z\left((P_0^\mu - \Pi_1^\mu)\bar\partial\xi^1_\mu - (P_0^\mu + \Pi_1^\mu)\partial\xi^2_\mu - 2\partial_1\bar\chi^1\bar\partial\theta^1 - 2\partial_1\bar\chi^2\partial\theta^2 + i\bar d^1\bar\partial\lambda^1 + i\bar d^2\partial\lambda^2\right) \tag{3.15}
$$

Die Geist–Wirkung wird zu

$$
S_{\mathrm{gh}} = \int d^2z\left(\bar w^1\bar\partial\lambda^1 + \bar w^2\partial\lambda^2 + \beta^1_\mu\bar\partial\xi^{1\mu} + \beta^2_\mu\partial\xi^{2\mu} + \bar\partial\bar\chi^1\kappa^1 + \partial\bar\chi^2\kappa^2 + b^1\bar\partial c^1 + b^2\partial c^2\right) \tag{3.16}
$$

konstruiert, die passenden Transformationen lauten

$$
\begin{aligned}
s\bar{w}^1 &= -i\bar{d}^1 - 2i\beta^1_\mu\bar{\lambda}^1\Gamma^\mu - 2i\xi^1_\mu\bar{\kappa}^1\Gamma^\mu + 2ib^1\partial_1\bar{\chi}^1 + \tfrac{3i}{2}\partial_1 b^1\bar{\chi}^1 \\
s\beta^1_\mu &= -P_{0\mu} + \Pi_{1\mu} - 2\bar{\kappa}^1\Gamma_\mu\lambda^1 - 2b^1\partial_1\xi^1_\mu - \partial_1 b^1\xi^1_\mu \\
s\kappa^1 &= 2\partial_1\theta^1 - 2ib^1\partial_1\lambda^1 - \tfrac{i}{2}\partial_1 b^1\lambda^1 \\
sb^1 &= 1 \\
sc^1 &= -\xi^1\partial_1\xi^1 + \tfrac{3i}{2}\bar{\chi}^1\partial_1\lambda^1 - \tfrac{i}{2}\partial_1\bar{\chi}^1\lambda^1
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Die Regeln für die Rechtsläufer erhält man durch Ersetzen des Superscripts 1 durch 2 und $-P_0^\mu$ durch P_0^μ.
Alle Transformations–Gesetze für die kombinierten Sektoren sind nun nilpotent.

3.3 Zusammenfassung

Die gesamte Wirkung kann nun angeschrieben werden ($h = \eta$):

$$
\begin{aligned}
S &= \underbrace{S_{\text{kin}} + S_{\text{WZ}}}_{S_{\text{GS}}} + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} = \\
&= -\int d^2z \left(\frac{1}{2}\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X_\mu + \bar{p}^1(\eta^{\alpha\beta} - \epsilon^{\alpha\beta})\partial_\beta\theta^1 + \bar{p}^2(\eta^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta})\partial_\beta\theta^2\right) + S_{\text{gh}} = \\
&= -\int d^2z \Bigg(\frac{1}{2}\bar{\partial}X^\mu\partial X_\mu - i\partial X^\mu\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1 - i\bar{\partial}X^\mu\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial\theta^2 - \frac{1}{2}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^1 + \\
&\quad - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial\theta^2\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2 - \bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\bar{\partial}\theta^2 + \bar{d}^1\bar{\partial}\theta^1 + \bar{d}^2\partial\theta^2 + \\
&\quad + \bar{w}^1\bar{\partial}\lambda^1 + \bar{w}^2\partial\lambda^2 + \beta^1_\mu\bar{\partial}\xi^{1\mu} + \beta^2_\mu\partial\xi^{2\mu} + \bar{\partial}\bar{\chi}^1\kappa^1 + \partial\bar{\chi}^2\kappa^2 + b^1\bar{\partial}c^1 + b^2\partial c^2\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\Pi^\mu_\alpha &= \partial_\alpha X^\mu - i\bar{\theta}^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A \\
\bar{d}^1 &= \bar{p}^1 + \left(i\partial X^\mu + \frac{1}{2}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial\theta^1 + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial\theta^2\right)\bar{\theta}^1\Gamma_\mu \\
\bar{d}^2 &= \bar{p}^2 + \left(i\bar{\partial}X^\mu + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\bar{\partial}\theta^2 + \frac{1}{2}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\bar{\partial}\theta^1\right)\bar{\theta}^2\Gamma_\mu
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Mit $\frac{1}{2}\left(\Pi^\mu_0\right)^2 = -\frac{1}{2}P_0^\mu P_{0\mu} + P_0^\mu\Pi_{0\mu}$ und Ausnutzung der freien Feldgleichungen, sodass nur ∂_1–Ableitungen vorkommen, lautet die BRST–Transformation (über links einfach und rechts doppelt vorkommendes A wird nicht summiert):

$$
\begin{aligned}
sX^\mu &= \bar\theta^1\Gamma^\mu\lambda^1 + \xi^{1\mu} + \bar\theta^2\Gamma^\mu\lambda^2 + \xi^{2\mu} \\
s\theta^A &= i\lambda^A \\
s\lambda^A &= 0 \\
s\xi^{A\mu} &= -i\bar\lambda^A\Gamma^\mu\lambda^A \\
s\bar d^1 &= 2\partial_1\bar\chi^1 - 2(\Pi_{1\mu} - P_{0\mu})\Gamma^\mu\lambda^1 - 4i\bar\xi^1_\mu\Gamma^\mu\partial_1\theta^1 \\
s\bar d^2 &= 2\partial_1\bar\chi^2 - 2(\Pi_{1\mu} + P_{0\mu})\Gamma^\mu\lambda^2 - 4i\bar\xi^2_\mu\Gamma^\mu\partial_1\theta^2 \\
sP_0^\mu &= -2\bar\lambda^1\Gamma^\mu\partial_1\theta^1 + 2\bar\lambda^2\Gamma^\mu\partial_1\theta^2 - \partial_1\xi^{1\mu} + \partial_1\xi^{2\mu} \\
s\Pi_1^\mu &= 2\bar\lambda^1\Gamma^\mu\partial_1\theta^1 + 2\bar\lambda^2\Gamma^\mu\partial_1\theta^2 + \partial_1\xi^{1\mu} + \partial_1\xi^{2\mu} \\
s\bar\chi^A &= 2\xi^{A\mu}\bar\lambda^A\Gamma_\mu \\
s\bar w^A &= -i\bar d^A - 2i\beta^A_\mu\bar\lambda^A\Gamma^\mu - 2i\xi^A_\mu\bar\kappa^A\Gamma^\mu + 2ib^A\partial_1\bar\chi^A + \frac{3i}{2}\partial_1 b^A\bar\chi^A \\
s\beta^1_\mu &= -P_{0\mu} + \Pi_{1\mu} - 2\bar\kappa^1\Gamma_\mu\lambda^1 - 2b^1\partial_1\xi^1_\mu - \partial_1 b^1\xi^1_\mu \\
s\beta^2_\mu &= P_{0\mu} + \Pi_{1\mu} - 2\bar\kappa^2\Gamma_\mu\lambda^2 - 2b^2\partial_1\xi^2_\mu - \partial_1 b^2\xi^2_\mu \\
s\kappa^A &= 2\partial_1\theta^A - 2ib^A\partial_1\lambda^A - \frac{i}{2}\partial_1 b^A\lambda^A \\
sb^A &= 1 \\
sc^A &= -\xi^A\partial_1\xi^A + \frac{3i}{2}\bar\chi^A\partial_1\lambda^A - \frac{i}{2}\partial_1\bar\chi^A\lambda^A
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Literaturverzeichnis

[1] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 1: Introduction”, *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).*

[2] P. A. Grassi, G. Policastro, M. Porrati and P. Van Nieuwenhuizen, “Covariant quantization of superstrings without pure spinor constraints”, arXiv:hep-th/0112162.

[3] Maximilian Kreuzer, “Einführung in die Superstring–Theorie I”, LV-Nr. 135.251, http://hep.itp.tuwien.ac.at/ kreuzer/inc/est.ps.gz

[4] Maximilian Kreuzer, “Einführung in die Superstring–Theorie II”, LV-Nr. 135.005, http://hep.itp.tuwien.ac.at/ kreuzer/inc/esst.ps.gz

[5] Maximilian Kreuzer, “Geometrische Methoden der Theoretischen Physik”, LV-Nr. 135.029, http://hep.itp.tuwien.ac.at/ kreuzer/inc/gmtp.ps.gz

[6] P. A. Grassi, G. Policastro and P. Van Nieuwenhuizen, “The Covariant Quantum Superstring and Superparticle from their Classical Actions”, arXiv:hep-th/0209026 v1 3 Sep 2002.